



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA**  
**Departamento de Ciências Exatas e da Terra - Campus II**  
**Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas**

**ÍNDICES FRACTAIS ALTERNATIVOS À DIMENSÃO BOX-COUNTING: DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO E LACUNARIDADE**

Soraia Bitencourt Carvalho

**Alagoinhas - Bahia - Brasil  
2024**

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas

Soraia Bitencourt Carvalho

**Índices Fractais alternativos à Dimensão *Box-Counting*: Dimensão da Informação e da Lacunaridade**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas da Universidade do Estado da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Simulação de Biossistemas.

Área de conhecimento: Interdisciplinar.

Linha de Pesquisa: Modelagem e Otimização de Biossistemas

Orientador: Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas

Soraia Bitencourt Carvalho

Índices Fractais alternativos à Dimensão *Box-Counting*: Dimensão da Informação e da Lacunaridade

Profa. Dra. Adriana Marmori Lima

Reitora

Profa. Dra. Tânia Hetkowski

Pró-Reitora de Pesquisa e Ensino de Pós-Graduação

C331i      Carvalho, Soraia Bitencourt

Índices Fractais alternativos à Dimensão *Box-Counting*: Dimensão da Informação e da Lacunaridade/ Soraia Bitencourt Carvalho – Alagoinhas, 2024.

57 f.: il

Orientador: Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado da Bahia, Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas. Mestrado em Modelagem e Simulação de Biossistemas – Alagoinhas, 2024.

1. Dimensão da informação 2. Lacunaridade 3. Dimensão *Box-Couting* I.  
Nascimento, Antônio Teófilo Ataíde. II. Brito, Gustavo Reis de. III. Universidade  
do Estado da Bahia – Departamento de Ciências Exatas e da Terra – Campus II.  
IV. Título

**FOLHA DE APROVAÇÃO**  
**"ÍNDICES FRACTAIS ALTERNATIVOS À DIMENSÃO BOX-COUNTING: DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO E LACUNARIDADE "**

**SORAIA BITENCOURT CARVALHO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas – PPGMSB, em 8 de março de 2024, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestra em Modelagem e Simulação de Biossistemas pela Universidade do Estado da Bahia, conforme avaliação da Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente

 ANTONIO TEOFILO ATAIDE DO NASCIMENTO  
Data: 08/03/2024 11:46:57-0300  
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

Professor Dr. ANTÔNIO TEÓFILO ATAÍDE DO NASCIMENTO  
UNEB  
Doutorado em Matemática  
Universidade Federal da Bahia

Documento assinado digitalmente  
 ELTAMARA SOUZA DA CONCEICAO  
Data: 08/03/2024 21:00:03-0300  
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

Professor(a) Dr.(a) ELTAMARA SOUZA DA CONCEIÇÃO  
UNEB  
Doutorado em Entomologia  
Universidade Federal de Viçosa

Documento assinado digitalmente  
 PERFILINO EUGENIO FERREIRA JUNIOR  
Data: 08/03/2024 20:07:47-0300  
Verifique em <https://validar.itи.gov.br>

Professor Dr. PERFILINO EUGÊNIO FERREIRA JUNIOR  
UFBA  
Doutorado em Matemática  
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

## **AGRADECIMENTOS**

Depois de dois anos de muito estudo, obstáculos, provações, alegrias, descobertas, parcerias, decepções e encantamentos, agradeço por todo esse processo de pesquisa, a Deus, pois sem Ele nada valeria a pena, e por ter a Sua permissão para realização de mais um sonho.

Preciso expressar todo agradecimento e amor aos meus pais, que desde criança me ensinaram a buscar o melhor caminho a trilhar, nunca esquecendo da honestidade e do meu valor como pessoa. À minha família, com muito amor, às minhas filhas e neta, juntos somos o transbordo da presença de Deus em nossas vidas. Daniela Karine, minha incentivadora, amiga, prima e de muita importância neste momento. Agradeço principalmente por ter acreditado em mim.

A todos os meus amigos, o meu muito obrigada, por vivenciar comigo esse momento de pesquisa. Seja torcendo, apoiando ou até mesmo me ajudando na realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento, meu muito obrigada, por ter me aceitado como sua orientanda, dedicando horas de estudo para meu desenvolvimento profissional e pessoal, me fortalecendo quando tudo parecia difícil, me ajudando quando me sentia desanimada, sempre me levando a crescer como pesquisadora e pessoa. Obrigada pela dedicação ao nosso trabalho, deixando, muitas vezes, seu momento pessoal para estar me ajudando. E nos momentos de dificuldades, sempre acertando uma saída para a realização da pesquisa.

Ao PPGMSB e a todos os docentes que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico.

## **Resumo**

Este trabalho faz uso da dimensão da informação baseada na entropia de Shannon e Tsallis para a análise dos contornos de objetos planos, citando o método de lacunaridade, que serve para avaliar a distribuição de lacunas em um conjunto de dados. A pesquisa objetivou aplicar a dimensão da informação na detecção de perturbações das fronteiras e o índice da lacunaridade na análise de espaços vazios. Para tal, construíram-se exemplos de quadrados com pequenas perturbações de fronteiras, com mesma massa e que apresentavam a mesma Dimensão *Box-Counting*, mas não possuem a mesma dimensão da informação. Tal construção foi pensada tendo em vista que a entropia é sensível à frequência da imagem em cada *box*. Em resumo, os resultados obtidos demonstram que a dimensão da informação representa uma ferramenta valiosa na análise na detecção de perturbações de fronteira, consequentemente, na análise da complexidade de objetos, enquanto que o índice de lacunaridade no FracDim correspondeu ao esperado, suas curvas de lacunaridade nesta proposta é dependente do parâmetro escala( $r$ ).

**Palavras-chave:** dimensão da informação; lacunaridade; dimensão *Box-Counting*; entropia.

## ABSTRACT

This work makes use of the information dimension based on Shannon and Tsallis entropy to analyze the contours of flat objects, citing the lacunarity method, which serves to evaluate the distribution of gaps in a data set. The research aimed to apply the information dimension in detecting boundary disturbances and the lacunarity index in the analysis of empty spaces. To this end, examples of squares were constructed with small boundary disturbances, with the same mass and which had the same Box-Counting Dimension, but they did not have the same information dimension. This construction had designed considering that entropy is sensitive to the frequency of the image in each box. In summary, the results obtained demonstrate that the information dimension represents a valuable tool in the analysis of the detection of boundary disturbances, consequently, in the analysis of the complexity of objects, while the lacunarity index in FracDim corresponded to what was expected, its lacunarity curves in this proposal it is dependent on the scale( $r$ ) parameter.

**Keywords:** information dimension; lacunarity; Box-Counting dimension; entropy.

## **Lista de Ilustrações**

Figura 1 – Conjunto de Cantor .....	17
Figura 2 – Triângulo de Sierpinski.....	18
Figura 3 – Esponja de Menger.....	19
Figura 4 – Aplicação do método <i>Box-Counting</i> .....	21
Figura 5 – Quadrado A com 1 lado perturbado.....	26
Figura 6 – Quadrado B com 2 lados perturbados.....	27
Figura 7 – Quadrado C com 3 lados perturbados.....	27
Figura 8 – Quadrado D com 4 lados perturbados.....	28
Figura 9 – Algoritmo para a dimensão <i>Box-Counting</i> .....	29
Figura 10 – Algoritmo para ContaBoxs.....	29
Figura 11 – Resultado da <i>Box-Counting</i> no quadrado com 1 lado perturbado.....	30
Figura 12 – Resultado da <i>Box-Counting</i> no quadrado com os 4 lados perturbados....	30
Figura 13 – Algoritmo para o cálculo da dimensão com a entropia de Shannon.....	32
Figura 14 – Algoritmo da entropia de Shannon.....	33
Figura 15 – Algoritmo para a dimensão da informação com a entropia de Tsallis.....	35
Figura 16 – Algoritmo para a entropia de TSallis.....	36
Figura 17 – Padrões utilizados para o cálculo do índice de lacunaridade, com mesma massa.....	37
Figura 18 – Função box deslizante e contapixel definida.....	39
Figura 19 – Algoritmo da função número de boxcommassa.....	39
Figura 20 – Algoritmo para definir os momentos na lacunaridade.....	40
Figura 21 – Algoritmo da lacunaridade.....	40
Figura 22 – As dimensões fractais na barra de Menu do aplicativo FracDim.....	42
Figura 23 – Barra de Menu do FracDim na função Gráficos.....	42
Figura 24 – Resultado da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis, no quadrado A com 1 lado perturbado.....	43

Figura 25 – Resultado da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis, no quadrado D com os 4 lados perturbados.....	43
Figura 26 – Gráfico de teste no aplicativo Fracdim do índice da lacunaridade com raio < 10 com o padrão C.....	44
Figura 27 – Gráfico da Dimensão <i>Box-Counting</i> e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado A.....	48
Figura 28 – Gráfico da Dimensão <i>Box-Counting</i> e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado B.....	48
Figura 29 – Gráfico da Dimensão <i>Box-Counting</i> e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado C.....	49
Figura 30 – Gráfico da Dimensão <i>Box-Counting</i> e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado D.....	49
Figura 31 – Gráfico da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis do quadrado A, com 1 lado perturbado.....	51
Figura 32 – Gráfico da Dimensão da Informação com a entropia Shanon e de Tsallis do quadrado D, com 4 lados perturbados.....	52
Figura 33 – Padrões para o cálculo do índice de lacunaridade.....	53
Figura 34 – Gráfico do resultado esperado do índice de lacunaridade dos padrões A, B e C com raio > 40.....	54

## **Lista de Tabelas**

Tabela 1 – Testes com o quadrado variando o índice entrópico q.....	34
Tabela 2 – Resultado da Dimensão <i>Box-Counting</i> e a Dimensão da Informação com a entropia de Shannon .....	45
Tabela 3 – Resultado da Dimensão <i>Box-Counting</i> e a Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis .....	50
Tabela 4 – Resultados das dimensões da Informação com a entropia de Shannon e Tsallis nos padrões A, B e C.....	53

## **Lista de Siglas**

$D_{Box}$  – Dimensão *Box-Counting*

DI – Dimensão da Informação

DS – Dimensão da Informação com a entropia de Shannon

$D_{TS}$  – Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis

$H(x)$  – Entropia de Shannon

$H_{TS}$  – Entropia de Tsallis

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>CAPÍTULO I. ESTADO DA ARTE.....</b>	<b>15</b>
1.1 FRACTAIS .....	15
1.2 DIMENSÃO FRACTAL.....	15
1.2.1 <i>Dimensão área e perímetro</i> .....	20
1.2.2 <i>Dimensão Box-Counting</i> .....	21
1.2.3 <i>Dimensão da Informação</i> .....	22
1.2.4 <i>Lacunaridade</i> .....	24
<b>CAPÍTULO II. MATERIAIS E MÉTODOS.....</b>	<b>26</b>
2.1 DADOS E SOFTWARES UTILIZADOS.....	26
2.2 IMPLEMENTAÇÃO DA DIMENSÃO BOX-COUNTING.....	26
2.2.1 <i>Algoritmo da Box-Counting</i> .....	28
2.3 IMPLEMENTAÇÃO DA DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO .....	31
2.3.1 <i>Dimensão da Informação com a entropia de Shannon</i> .....	31
2.3.1.1 <i>Algoritmo com a entropia de Shannon</i> .....	32
2.3.2 <i>Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis</i> .....	33
2.3.2.1 <i>Algoritmo da dimensão da informação com a entropia de Tsallis</i> .....	34
<b>CAPÍTULO III. LACUNARIDADE .....</b>	<b>37</b>
3.1 DEFINIÇÃO .....	37
3.2 IMPLEMENTAÇÃO DA LACUNARIDADE .....	37
3.2.1 <i>Modelo matemático</i> .....	38
3.2.2 <i>Algoritmo da Lacunaridade</i> .....	38
<b>CAPÍTULO IV. APLICATIVO FRACDIM.....</b>	<b>41</b>

4.1 MENU E FUNÇÕES DO APLICATIVO.....	41
4.2 NA PRÁTICA.....	42
<b>CAPÍTULO V. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>45</b>
5.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA <i>BOX-COUNTING</i> E DA DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO COM A ENTROPIA DE SHANNON .....	45
5.1.1 <i>Demonstração</i> .....	46
5.1.2 <i>Gráficos da Dimensão Box-Counting com a Dimensão da Informação com a entropia de Shannon</i> .....	47
5.2 DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO COM A ENTROPIA DE TSALLIS.....	50
5.2.1 <i>Gráficos da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis</i> .....	51
5.3 RESULTADOS ESPERADOS EM GRÁFICOS DA LACUNARIDADE PARA OS PADRÕES A, B E C.....	53
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>56</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>57</b>

## INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos naturais são irregulares e podem parecer igualmente complexos em diferentes escalas de observação. O uso de fractais para medir a complexidade de um fenômeno, ou objetos da natureza, está sendo cada vez mais difundido. E isto se dá, principalmente, pela ampla verificação de autossimilaridades na natureza. Pode-se entender que um fractal é uma forma geométrica complexa, construída de cópias menores de si mesma.

A palavra 'fractal' foi cunhada por Mandelbrot em seu ensaio, vinda do latim *fractus*, que significa quebrado, para descrever objetos que eram muito irregulares para caber em uma configuração geométrica tradicional (Falconer, 2014).

Mandelbrot (1983) definiu fractais como objetos conceituais que apresentam estrutura semelhante em todas as escalas espaciais; são autossimilares e independem de escala. Pode-se entender que um fractal é uma forma geométrica complexa, construída de cópias menores de si mesmo.

Os fractais são objetos matemáticos que não podem ser modelados puramente pela abordagem da geometria euclidiana, porém é possível associar um fractal a um número, dito dimensão fractal, com a característica de possuírem uma dimensão fracionária, que dá a informação de como sua forma (natureza topológica), ocupa o seu *habitat* (espaço euclidiano). Além disso, a dimensão fractal quantifica como o "tamanho" de um conjunto fractal muda com diferentes escalas de observação.

A dimensão fractal, com o princípio de caracterizar formas matemáticas complexas conhecidas como fractais, é uma medida de quanto estas formas preenchem o espaço. No entanto, formas distintas podem apresentar o mesmo valor da dimensão fractal dada pela *Box-Counting*. Assim, neste estudo busca-se verificar a existência de um índice adaptado que possa resolver certas ambiguidades de dimensões fractais, mais especificamente, da dimensão *Box-Counting*.

O objetivo deste estudo é aplicar a dimensão da informação na detecção de perturbações das fronteiras e analisar o índice da lacunaridade por meio do aplicativo FracDim. E os objetivos específicos são: mostrar que a dimensão da informação, uma adaptação da *Box-Counting*, dada pela entropia de Shannon, que seja capaz de detectar pequenas perturbações de fronteiras que não são detectadas pela *Box-*

*Counting*; analisar ineditamente, a entropia de Tsallis para potencializar os efeitos da dimensão da informação e avaliar o método de lacunaridade em um conjunto de dados para detectar alterações na distribuição de lacunas.

Na comprovação experimental de que a dimensão da informação pode ser aplicada na distinção de perturbações de fronteira de objetos planos, observa-se que tal técnica pode ser aplicada à ecologia como na detecção de patologias em células, folhas e até mesmo monitoramento de florestas.

Como complemento da dimensão fractal, Mandelbrot (1983) introduziu o conceito de lacunaridade (palavra derivada do latim “lacuna”, que significa “vazio”) para descrever e quantificar o desvio de objetos fractais de sua invariância translacional, avaliando a distribuição de tamanhos de lacunas em textura de objeto.

Para tanto, amplia-se a análise desse estudo com o cálculo de lacunaridade para avaliar se o método pode detectar alterações em padrões com diferentes distribuições de pixels no aplicativo Fracdim, software em desenvolvimento. E quanto maior o índice da lacunaridade, mais homogêneo o objeto de estudo e a análise é obtida da distribuição de espaços vazios (lacunas) deixados pelo objeto.

Esta investigação surge pela necessidade da pesquisadora em colocar significados para os conteúdos de matemática, atrelados pelo conhecimento em modelagem matemática e da inquietação por métodos que se aproximassesem da matemática do mundo tecnológico. Portanto, torna-se relevante este estudo com a finalidade de investigar um índice que possa resolver certas ambiguidades da dimensão fractal, contribuindo par o desenvolvimento de um aplicativo que faz a leitura das dimensões, a partir das imagens em estudo e expõe os gráficos de forma direta e precisa.

Esta dissertação está organizada com os seguintes capítulos: No Capítulo I apresentam-se os dados com informações sobre as áreas de estudo, conceitos de fractais, dimensão fractal e dimensões mais usuais. No Capítulo II constam os materiais e métodos do cálculo das dimensões, modelos matemáticos e software utilizado. O Capítulo III aborda a lacunaridade, definindo e apresentando a implementação. O Capítulo IV descreve o desenvolvimento do aplicativo FracDim. No Capítulo V, citam-se os resultados, em gráficos e tabelas com discussão. E por fim a conclusão, que apresenta os resultados obtidos na pesquisa em tela.

## CAPÍTULO I. ESTADO DA ARTE

A leitura, a organização dos textos sobre dimensão fractal e modelagem matemática, assim como os resultados com ambiguidades obtidas da dimensão *Box-Counting* fornece *insights* para a análise dos índices da dimensão da informação e da lacunaridade e estes podem contribuir para uma medida mais precisa nos estudos ecológicos, para que se reconstruam conhecimentos da matemática e da ciência computacional, visando o desenvolvimento de competências na ecologia.

### 1.1 FRACTAIS

Diferentes definições de fractais foram elaboradas com a evolução de sua teoria. Fractal é um neologismo que surgiu do adjetivo latino *fractus* e significa “irregular” ou “quebrado”. Uma das características dos objetos fractais é a dimensão fractal que pode ser determinada com várias fórmulas matemáticas.

Falconer (2014) explica que não é uma definição exata de fractal, apenas uma lista de características que são comuns à maioria dos fractais, embora existam aqueles que não possuam algumas dessas características.

Assim, pode-se pensar em fractal como um conjunto que, geralmente, apresenta estrutura fina, ou seja, detalhamento em escalas minúsculas; é muito irregular para ser descrito pela linguagem geométrica ou analítica tradicional; é definido de forma simples, geralmente recursiva; apresenta alguma forma de autossimilaridade e possui dimensão fractal maior do que a topológica (Falconer, 2014).

### 1.2 DIMENSÃO FRACTAL

A dimensão fractal mede o grau de preenchimento do espaço, ou seja, quantifica o tamanho de um conjunto fractal ( $F$ ), fornecendo assim, uma rica informação sobre suas propriedades geométricas.

Uma definição original para dimensão fractal apresentada por Mandelbrot (1983) é a dimensão de Hausdorff, entretanto existem outras que podem ser aplicadas a qualquer conjunto, sem a autossimilaridade exata.

Autossimilaridade estatística refere-se a repetições relacionadas à escala de complexidade geral, mas não do padrão exato. Especificamente, os detalhes em uma determinada escala são semelhantes, embora não idênticos, àqueles vistos em escalas mais grosseiras ou mais finas (Seuront, 2010).

O nome dimensão de Hausdorff vem do matemático alemão Felix Hausdorff (1868-1942), o qual publicou trabalhos na área de topologia e introduziu a ideia dessa dimensão. Anos mais tarde, o matemático francês Benoit Mandelbrot (1924-2010) retomou os estudos de Hausdorff em seus trabalhos sobre a geometria fractal.

A dimensão Hausdorff é a mais antiga e importante das dimensões fractais e, embora possa ser definida para qualquer conjunto, sua estimativa computacional é por vezes muito difícil (Falconer, 2014). Uma desvantagem da dimensão de Hausdorff é que, em muitos casos, é difícil ou até mesmo impossível o seu cálculo, até difícil uma estimativa numérica.

A dimensão Hausdorff é definida como o limite superior do logaritmo da quantidade de cubos de tamanho necessários para cobrir a estrutura, dividida pelo logaritmo do tamanho dos cubos. Em outras palavras, a dimensão Hausdorff mede uma quantidade de detalhes presentes em uma estrutura, quanto maior a dimensão Hausdorff, mais complexa é a estrutura.

A grande vantagem da dimensão de Hausdorff está em sua definição precisa, sendo essencial para a compreensão da dimensão como uma medida de preenchimento do espaço.

Uma propriedade comum em fractais é a *autossemelhança* ou similaridade de escala. Este termo descreve a propriedade que muitos sistemas possuem, na qual as partes, quando ampliadas, demonstrarão ser idênticas ao sistema como um todo (Lorenz, 1996).

No entanto, na dimensão fractal, pode-se caracterizar o objeto, primeiro a dimensão como o número que informa o quão denso o conjunto ocupa o espaço métrico, onde o mesmo se encontra e, segundo mostra a irregularidade do seu contorno, assim localizam-se objetos matemáticos que possuem dimensão fracionária.

A dimensão fractal pode assumir valores fracionários entre 0 e 2 no plano. E pode-se definir um fractal como um objeto, que possui dimensão maior do que sua dimensão topológica. Esta medida é aplicada na caracterização de formas

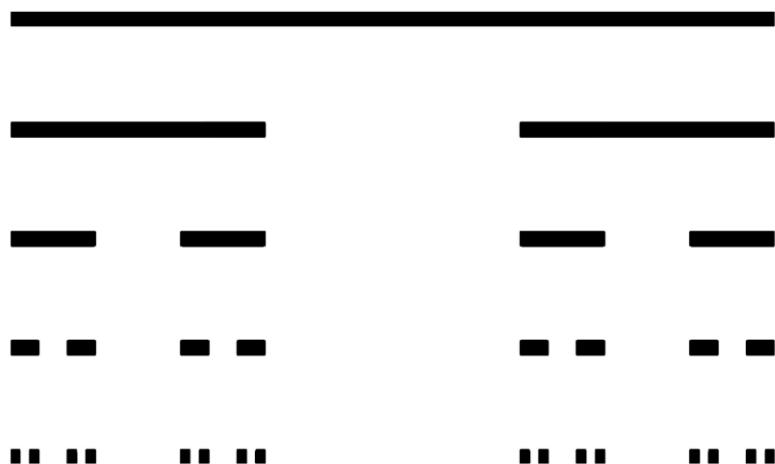
autossimilares. Sua utilidade é dar informação sobre o quanto uma forma preenche o plano.

É possível associar um fractal um número, dito dimensão fractal, que dá a informação de como sua forma (natureza topológica), ocupa o seu *habitat* (espaço euclidiano). Intuitivamente, um ponto tem dimensão 0, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e um cubo tem dimensão 3.

O conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski e a esponja de Menger, apresentadas nas Figuras 1, 2 e 3, encontram-se no espaço euclidiano unidimensional, bidimensional e tridimensional, respectivamente.

O Conjunto de Cantor é um subconjunto infinito do intervalo  $[0,1]$ , obtido dividindo esse intervalo em três partes iguais, retirando o terço médio e repetindo este procedimento, sucessiva e indefinidamente, nos intervalos restantes. Os pontos que restarem após essas infinitas sucessões formam o Conjunto de Cantor.

Figura 1 – Conjunto de Cantor

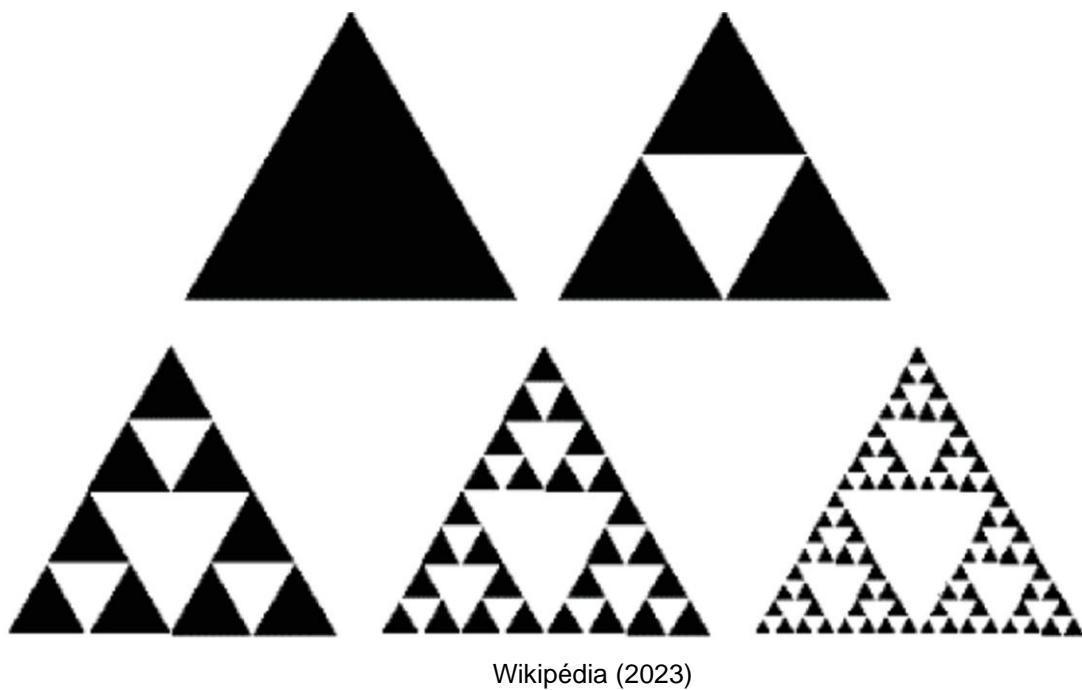


Wikipédia (2023)

A construção do Triângulo de Sierpinski é um processo iterativo, que tem o triângulo equilátero como ponto de partida. Na primeira iteração determinam-se os pontos médios de cada lado dessa figura e unem-se os pontos. Têm-se quatro triângulos equiláteros e remove-se o do meio.

Na segunda iteração, esses passos citados no parágrafo anterior são repetidos para cada um dos triângulos restantes. Assim, esse processo pode ser repetido, indefinidamente, dando origem ao fractal da figura abaixo.

Figura 2 – Triângulo de Sierpinski

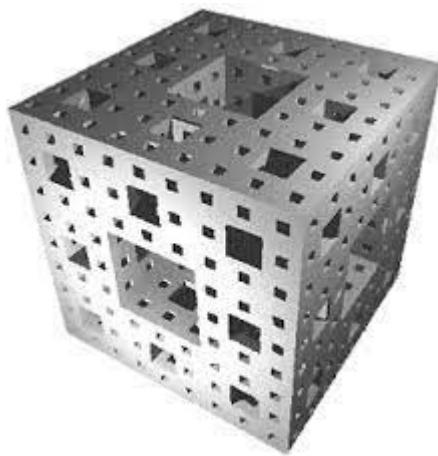


A esponja de Menger é um fractal que foi descrito pela primeira vez pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985), em 1926, partindo de discussões a respeito de dimensão topológica.

A partir de um cubo é construída a esponja de Menger, através do seguinte processo recursivo:

1. Em um cubo qualquer se divide cada face do cubo em 9 quadrados, desse modo o cubo fica subdividido em 27 cubos menores.
2. Remove-se o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, restando 20 cubos. Tem-se a primeira iteração, repete-se o processo nos 20 cubos restantes e obtêm-se a segunda iteração no final  $20^2$  cubos.
3. A esponja de Menger é o limite desse processo depois de um número infinito de iterações.

Figura 3 – Esponja de Menger



Fonte: Wikipédia (2022)

A dimensão fractal descreve quantos novos pedaços geometricamente similares ao objeto são observados quando a resolução é aumentada. Se há a redução da escala por um fator  $F$ , encontram-se  $N$  pedaços similares ao original; logo a dimensão fractal é definida por:  $N = F.d$ , onde  $d$  é a dimensão fractal que, em geral, fracionaria. Além disso, é menor do que a dimensão do espaço euclidiano em que o fractal se encontra.

O objeto  $F$  que possa ser dividido em  $Nr$  cópias de si mesmo em uma escala  $r$ . Para  $Nr = r^{-d}$  essa relação pode ser reescrita na forma:

$$d = - \frac{\log(Nr)}{\log(r)} \quad (1)$$

Seguindo esta definição para dimensão fractal do Conjunto de Cantor, encontra-se o valor  $d = (\log 2) / (\log 3) = 0,6309$  (Figura 1); para Triângulo de Sierpinski  $d = (\log 3) / (\log 2) = 1.5849$  (Figura 2) e para Esponja de Menger  $d = (\log 20) / (\log 3) = 2.7268$  (Figura 3).

Em caso de fractais estocásticos, existem vários métodos para se calcular a dimensão fractal, dentre eles os mais utilizados são: método da contagem de caixas (*Box-Counting*), dimensão de informação e lacunaridade.

### 1.2.1 Dimensão área e perímetro

O método perímetro-área recebeu diversas variações, ao longo do tempo, mas ele é usado, principalmente, em aplicações GIS (Sistema de Informação Gráfica) (Halley *et al.*, 2004; Yu *et al.*, 2019) e na ecologia de paisagem, sendo utilizado como uma medida da complexidade das bordas dos fragmentos florestais em relação à área que ocupam (Seuront, 2010).

Fragmentação florestal é o processo de redução de áreas de biótopos originalmente conectados, de habitats ou unidades da paisagem em dois ou mais fragmentos (Lang; Blaschke, 2009). Fragmento, é um elemento homogêneo de uma paisagem e uma unidade de referência espacial das medidas de sua estrutura.

A forma de um fragmento afeta diretamente a relação entre o perímetro e a área desse fragmento. Embora sejam bastante aplicadas na ecologia de paisagem, os índices perímetro-área não são dimensões verdadeiras no sentido matemático (Lopez; Frohn, 2017).

Sejam  $P$ ,  $A$  e  $DF$ , respectivamente, o perímetro, a área e a dimensão fractal de fragmento florestal, relacionam-se (Krummel *et al.*, 1987):

$$P \propto \sqrt{A^D} \quad (2)$$

onde  $\propto$  indica proporcionalidade. Assim, existe uma constante de proporcionalidade  $k$  que torna verdadeiro:

$$P = k A^{\frac{D}{2}} \quad (3)$$

aplicando logaritmos em ambos os lados da equação e desenvolvendo, obtém-se:

$$D = 2 \cdot \frac{\ln(\frac{P}{k})}{\ln(A)} \quad (4)$$

Os dados das medidas das áreas e perímetros dos fragmentos são marcados em um diagrama de dispersão log-log, a regressão linear é então aplicada, uma vez que a equação 2, e a dimensão fractal é, então, calculada através da inclinação da reta de regressão.

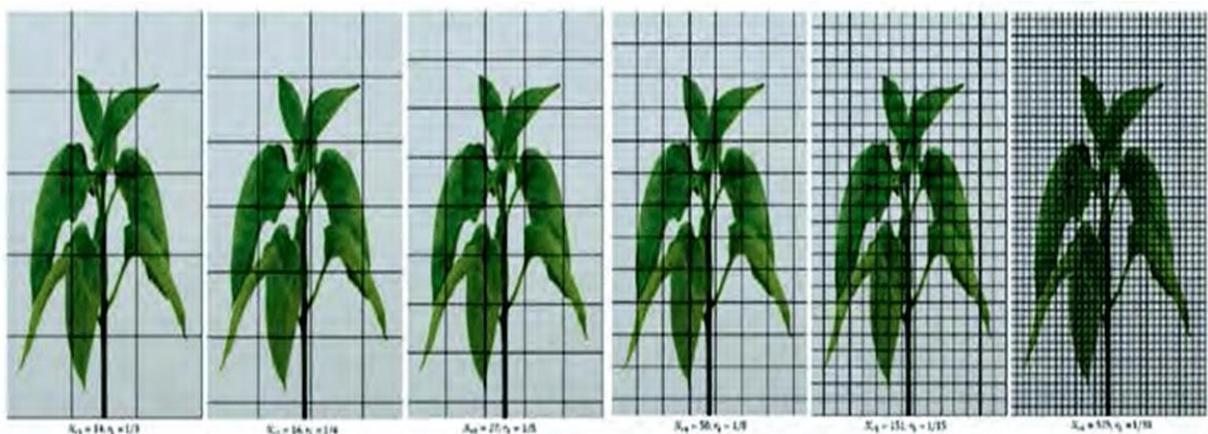
Quando  $k = 4$ ,  $D$  pode ser pensada para  $D = 2 \cdot \frac{\ln(\frac{P}{4})}{\ln(A)}$ .

### 1.2.2 Dimensão Box-Counting

Sendo a mais utilizada das dimensões fractais, Falconer (2014) comenta que a dimensão *Box-Counting* “[...] tem uma formulação intuitiva simples e é uma das dimensões mais amplamente utilizadas [...] e sua popularidade se deve em grande parte à sua relativa facilidade de cálculo matemático e estimativa empírica” (Falconer, 2014, p. 27, tradução nossa).

A curva, figura ou imagem é coberta por um conjunto de objetos da mesma área ou caixas, neste caso, caixas quadradas, no qual se determina um tamanho para a área do objeto e conta-se o número mínimo de caixas necessárias para cobrir completamente a figura. À medida que o tamanho das caixas se aproxima de zero, a área total coberta pelas caixas converge para o comprimento desejado da curva ou da imagem. Um exemplo de aplicação do método *Box-Counting* para cálculo da dimensão fractal está apresentado na Figura 4 variando a escala.

Figura 4 – Aplicação do método *Box-Counting*



Fonte: Guerra (2017)

A ideia de medição em diferentes escalas é inerente à grande parte das definições da geometria fractal, nas quais diversas leis de potência relacionam medida e escala e, assim, os expoentes dessas leis definem diferentes dimensões fractais, que determinam a ligação entre o espaço que um objeto ocupa e seu tamanho (Rosenberg, 2020; Seuront, 2010). Halley e outros autores (2004) afirmam que leis de potência já vinham sendo aplicadas na ecologia, antes mesmo da geometria fractal e que sua íntima relação com os fractais aumentou o interesse em estudos relacionados à geometria fractal. Os expoentes das leis de potência geralmente são diferentes da

unidade em casos biológicos, resultando em gráficos no formato de curvas, quando aplicadas [as leis de potência] em eixos lineares, contudo é possível linearizar esses gráficos, através do uso de eixos logarítmicos (Seuront, 2010).

No contexto de figuras planas, este método consiste na divisão da imagem em caixas, onde são contados os números de caixas que contêm alguma parte da figura, que representa o objeto em estudo, como o fractal, e o valor da dimensão pode ser calculado pela seguinte relação:

$$D_{Box} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (5)$$

Sendo  $\varepsilon$  o lado de cada caixa e  $n(\varepsilon)$  o número de caixas que contém alguma parte da figura.

Quanto menor a escala, mais precisa a dimensão estabelecida. A ideia é basicamente uma medida da figura, desprezando as irregularidades menores que a escala  $\varepsilon$ , analisando o comportamento da medida quando a escala tende a zero. Observa-se que, para objetos tridimensionais, as caixas são cubos e em espaços n-dimensionais são substituídos por hipercubos.

### 1.2.3 Dimensão da informação

A dimensão da informação não é um conceito amplamente utilizado, no entanto, de modo geral, é uma abordagem para se pensar sobre a complexidade da informação levando em conta, não apenas a forma, mas também, a distribuição da informação do objeto em estudo. Tal dimensão da informação é dada pela entropia de Shannon, definida em Seuront (2010).

A dimensão da informação com a entropia permite entender a variedade e a complexidade das informações contidas em um conjunto de dados. É uma medida importante para avaliar a quantidade de informação potencialmente útil e significativa, presente em um sistema.

Shannon (1948) propôs um modelo matemático para sistematizar o tratamento de informação na transmissão de mensagens de um ponto a outro. A teoria Matemática da Comunicação (Shannon, 1948) apresenta uma expressão matemática para a quantidade de informação transmitida numa mensagem e fornece uma maneira de analisar os principais eventos que formam a comunicação.

Para medir a quantidade de informação, Claude Shannon criou o conceito de entropia. A fórmula para a entropia de Shannon (Seuront, 2010) é dada por:

$$H(X) = - \sum p(x) \log p(x) \quad (6)$$

Onde  $X$  é a variável aleatória, associada a algum experimento e  $p(x)$  é a probabilidade do evento  $x$  ocorrer variando todos os eventos possíveis.

Com o objetivo de adaptar a dimensão *Box-Counting*, o número de caixas de tamanho  $\varepsilon$  é substituído pela entropia das caixas de tamanho  $\varepsilon$ , onde a distribuição de probabilidade é dada pela frequência da figura em cada caixa  $\varepsilon$ , mais precisamente a dimensão da informação de Shannon é dado por:

$$D_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (7)$$

Onde:

$$H(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln(p_i(\varepsilon)) \quad (8)$$

sendo  $p_i(\varepsilon)$  a frequência relativa do objeto na caixa de tamanho  $\varepsilon$  e  $m$  é a quantidade de caixas de tamanho  $\varepsilon$ . Ou seja, dado  $N$  o número total de pixels da imagem e  $f_i(\varepsilon)$  a quantidade de pixels, na caixa de tamanho  $\varepsilon$ , tem-se que:

$$p_i(\varepsilon) = \frac{f_i(\varepsilon)}{N} \quad (9)$$

Variando  $i$  entre o número de caixas de tamanho  $\varepsilon$ , tem-se como consequência que  $\sum_{i=1}^m p_i(\varepsilon) = 1$ .

No entanto, aqui propõe-se também, a utilização da entropia de Tsallis, com o objetivo de acentuar as caixas que possuam mais informação do objeto. As aplicações bem-sucedidas da entropia de Tsallis motivaram a investigação da ferramenta matemática por trás dessa estrutura.

O papel da mecânica estatística, por Tsallis, foi propor uma possível generalização da chamada Entropia de Boltzmann, Gibbs e Shannon, o que possibilitaria uma forma de descrever sistemas físicos (Bekenstein, 1973).

Tendo em mente que a dimensão da informação de Shannon leva em conta a quantidade de informação em cada caixa, torna-se bastante natural generalizar a ideia aplicando a entropia de Tsallis definida por:

$$H_{TS}(\varepsilon) = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^m p_i(\varepsilon)^q \right) \quad (10)$$

Ressaltando que, no limite, quando  $q \rightarrow 1$ , a entropia de Tsallis assume o valor da entropia de Shannon. Define-se, então, a dimensão da informação de Tsallis por:

$$D_{TS} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H_{TS}(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (11)$$

O parâmetro  $q$  potencializa a informação em cada caixa de tamanho  $\varepsilon$  e isso pode ser usado para distinguir melhor perturbações de fronteira.

#### 1.2.4 Lacunaridade

Como complemento da dimensão fractal, Mandelbrot (1983) introduziu o conceito de lacunaridade (palavra derivada do latim “lacuna”, que significa “vazio”) para descrever e quantificar o desvio de objetos fractais de sua invariância translacional, avaliando a distribuição de tamanhos de lacunas em textura de objeto.

Newman e outros autores definem lacunaridade como “[...] uma forma de caracterizar a configuração espacial de pontos ou outros componentes de um padrão espacial, tais como fragmentos ou pixels” (Newman *et al.*, 2019, p. 10, tradução nossa). Rosenberg (2020), por sua vez, define a lacunaridade como sendo a medida da uniformidade de um conjunto.

Enquanto a dimensão fractal é calculada, através da distribuição do objeto no espaço, quantificando o tamanho e essa medida muda em diferentes escalas, a lacunaridade é medida pela análise da distribuição dos espaços vazios (lacunas) deixados pelo objeto.

As propriedades e características de um fractal não são determinadas completamente por sua dimensão. Como a lacunaridade é uma característica distinta e independente da dimensão fractal, ela se relaciona fortemente com a distribuição e o tamanho das lacunas no fractal e usa momentos de probabilidade de ordem um e dois.

O índice de lacunaridade leva ao cálculo dos momentos de probabilidade de uma imagem e esse pode ser considerado como a somatória dos momentos de cada um dos seus pontos de massa. A distribuição de massa é dada por P:

$$P(S, r) = \frac{n(S, r)}{N(r)} \quad (12)$$

Sendo n (S, r) o número de caixas contendo exatamente S pontos da imagem e N(r) o número total de caixas de lado r.

Pela definição P tem-se  $\sum P = 1$ , sendo P uma distribuição de probabilidade, permitindo momento 1 e 2:

$$Z_1(r) = \sum_{s=0}^{r^2} s * P(s, r) \quad \text{e} \quad Z_2(r) = \sum_{s=0}^{r^2} s^2 * P(s, r)$$

A lacunaridade na escala r é dada pelo quociente de momentos:

$$L(r) = \frac{Z_2}{(Z_1)^2} \quad (13)$$

## CAPÍTULO II. MATERIAIS E MÉTODOS

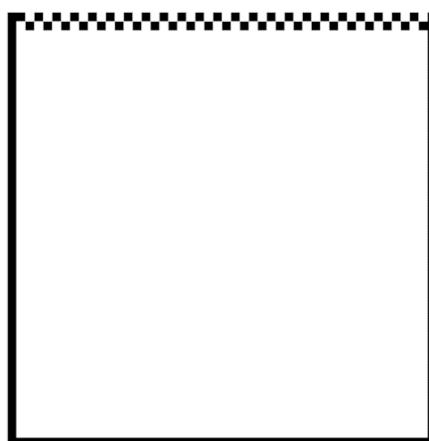
### 2.1 DADOS E SOFTWARE UTILIZADOS

Neste estudo utilizaram-se como dados, os quadrados com pequenas perturbações de fronteiras, com mesma massa, construídos no *software* GIMP, tradução versão 2.10.34 e, também, o mesmo para confecção das figuras com padrões e distribuições de pixels diferentes. Implementou-se o algoritmo para o cálculo da dimensão da informação e da lacunaridade que plotou os gráficos e possibilitou a criação de tabelas em linguagem de programação Python, isso ocorreu no ambiente integrado de desenvolvimento do VSCode, onde o mesmo apresentou bom desempenho computacional para a dimensão de informação.

### 2.2 IMPLEMENTAÇÃO DA DIMENSÃO BOX-COUNTING

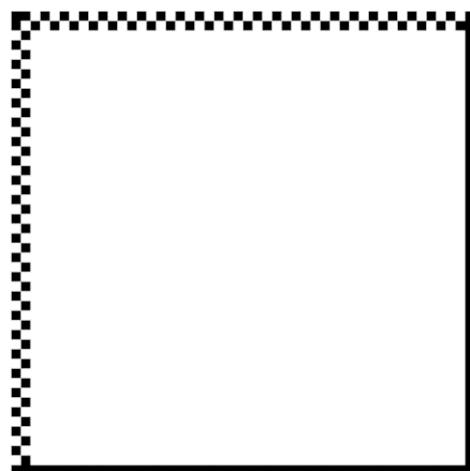
Especificamente utilizou-se o *software* GIMP para a construção de quadrados, como nas Figuras 5, 6, 7 e 8, com contornos de mesma massa, ou seja, mesma quantidade de pixels em sua fronteira, com a peculiaridade que seus vértices e suas dimensões fossem potências de dois. Tal preocupação é que subdivisões das caixas no algoritmo *Box-Counting* mantivessem as interseções da divisão anterior.

Figura 5 – Quadrado A com 1 lado perturbado



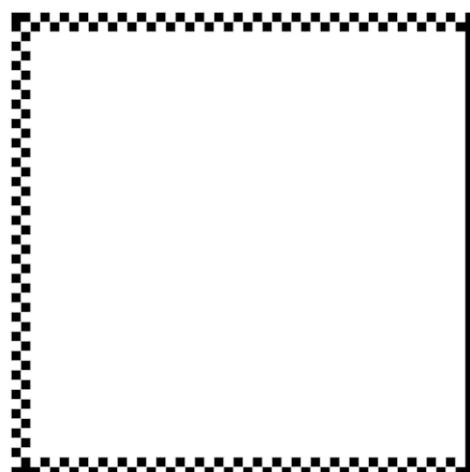
Fonte: A autora (2023)

Figura 6 – Quadrado B com 2 lados perturbados



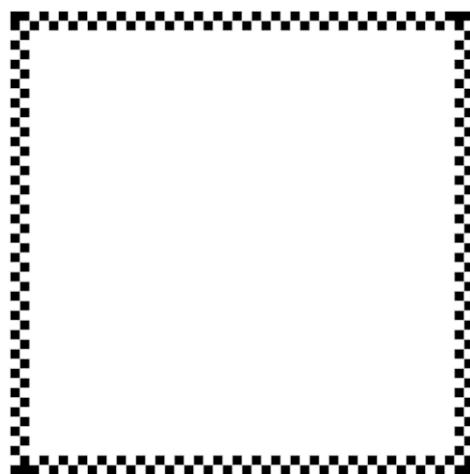
Fonte: A autora (2023)

Figura 7 – Quadrado C com 3 lados perturbados



Fonte: A autora (2023)

Figura 8 – Quadrado D com 4 lados perturbados



Fonte: A autora (2023)

Desenvolveu-se também, na linguagem Python um *software* denominado, FracDim, para calcular a regressão linear das dimensões *Box-Counting*, a dimensão então, será a inclinação da linha de regressão associada aos valores do logaritmo, ou seja, o tamanho do lado da caixa e o log da quantidade de caixas.

Inicialmente, após a implementação da dimensão *Box-Counting*, foram realizados testes com figuras geométricas regulares e a cada avanço eram geradas mudanças sutis nas fronteiras da figura para obter figuras planas distintas com a mesma dimensão *Box-Counting*. Chegando, então, aos quadrados modificados em um, dois, três e quatro lados, representados nas figuras supracitadas, que apresentam a mesma dimensão *Box-Counting* e, que, não possuem a mesma dimensão da Informação.

### 2.2.1 Algoritmo da Box-Counting

O algoritmo de contagem de caixa (*Box-Counting*) consiste em cobrir o fractal por  $N(\varepsilon)$  caixas de tamanho  $\varepsilon$  que contenham pelo menos um ponto do objeto. O processo é repetido com caixas de diferentes tamanhos e traça-se um gráfico do  $\ln[N(\varepsilon)]$  em função de  $\ln(\varepsilon)$ .

Figura 9 – Algoritmo para a dimensão *Box-Counting*

```

504 def CalculoDimensaoBoxCounting():
505
506     global PontosDaBoxCounting
507     x0=0
508     y0=0
509
510     WF=Img.width
511     HF=Img.height
512     #WF= Paisagem.winfo_width()
513     #HF= Paisagem.winfo_height()
514     print(WF,HF)
515     global DesenhaBox
516     x=[]
517     y=[]
518     for Passos in range(1,9):
519         if Passos==8:
520             DesenhaBox=true
521             DI=2**Passos # número de divisões
522             W=(WF/DI) # largura dos box's
523             H=(HF/DI) # altura dos box's
524             NumeroDeBox=ContaBoxes(x0,y0,W,H,WF,HF)
525             x.append(ln(1/min(W,H))) # W = H na figura quadrada
526             y.append(ln(NumeroDeBox))
527             PontosDaBoxCounting.append(x)
528             PontosDaBoxCounting.append(y) # Guarda pontos para plotagem dos gráficos
529     return(x,y)

```

Fonte: A autora (2023)

O algoritmo varre e conta as caixas que contêm a figura, onde o x é o  $\ln(1/\min(W,H))$ , W é a largura do box e H é a altura do box, e na coordenada y, o número de box que cobre a figura.

A função contaBoxes chama os parâmetros (x0, y0, W, H, WF, HF) responsável por contar a quantidade dos boxes que contém a figura.

Figura 10 – Algoritmo para ContaBoxes

```

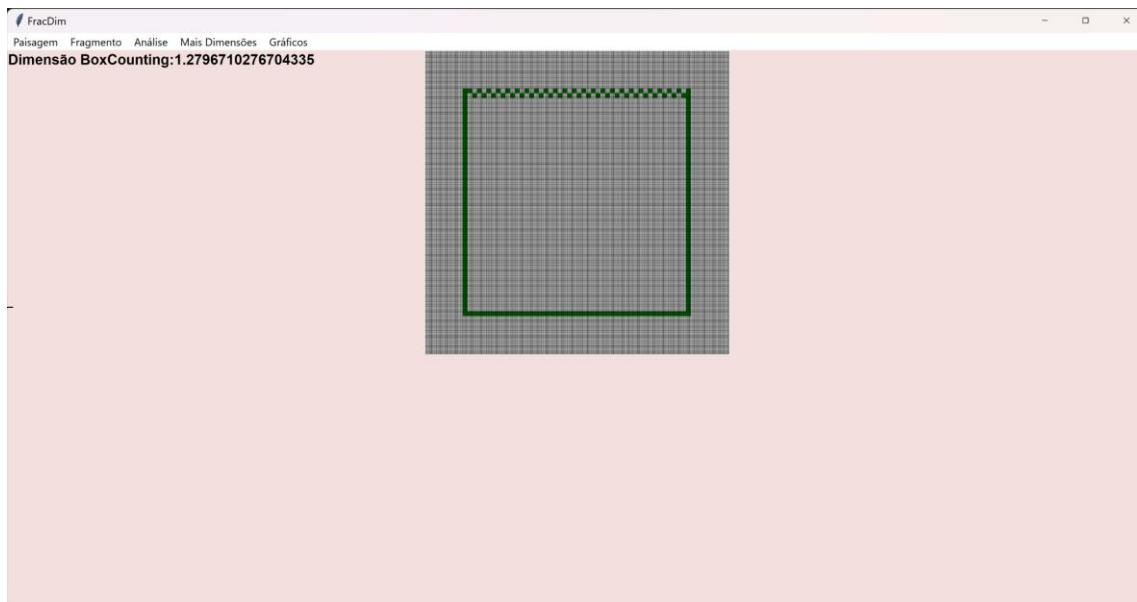
533 def ContaBoxes(x0,y0,W,H,WF,HF):
534
535     DH=0
536     DW=0
537     cont=0
538     while(DH*H<HF):
539         while(DW*W<WF):
540             if (TestaSeBoxIntersectaFigura(x0+DW*W, y0+DH*H, x0+(DW+1)*W, y0+(DH+1)*H)):
541                 cont=cont+1
542             DW=DW+1
543             DH=DH+1
544             DW=0
545     return(cont)

```

Fonte: A autora (2023)

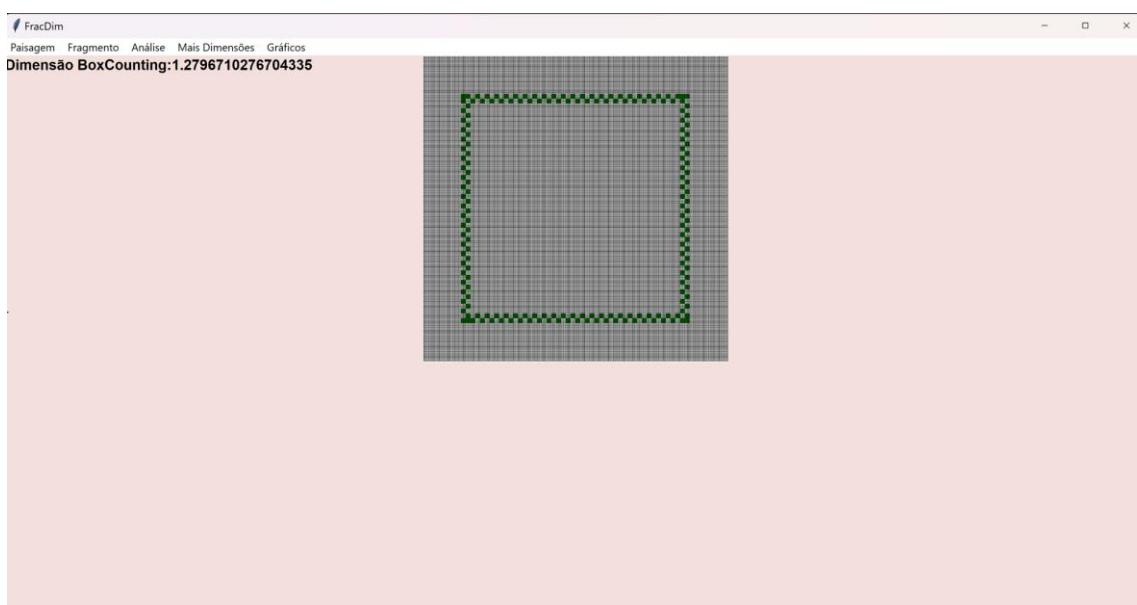
As Figuras 11 e 12 mostram em green (verde) os boxes que cobrem a Figura, o número de divisões, ou seja, a potência está atrelada ao número de passos da função, altura e largura dos boxes, gerando uma dimensão *Box-Counting*, que é apresentada no lado superior esquerdo da tela.

Figura 11 – Resultado da *Box-Counting* no quadrado com 1 lado perturbado



Fonte: A autora ( 2023)

Figura 12 – Resultado da *Box-Counting* no quadrado com os 4 lados perturbados



Fonte: A autora ( 2023)

## 2.3 IMPLEMENTAÇÃO DA DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO

Construíram-se, então, exemplos de formas geométricas que possuem a mesma dimensão *Box-Counting*, mas que não possuem a mesma dimensão da informação provando assim que a dimensão da informação resolve ambiguidades geradas pela dimensão *Box-Counting* e revela mais sobre a complexidade da fronteira de certos objetos planos.

Da dimensão da informação implementada, que facilita a coleta dos resultados detectando as pertubações, percebe-se a possibilidade de estudo da dimensão concomitante no desenvolvimento dos cálculos das entropias de Shannon e Tsallis. E isto pode ser amplamente aplicado para resolver problemas com a modelagem na arquitetura, na medicina, como exemplo ritmo cardíaco, em detecção de degradação no âmbito da ecologia, ou desgaste de material, no âmbito da Engenharia.

### 2.3.1 Dimensão da Informação com a entropia de Shannon

A entropia é uma medida da incerteza ou desordem presente em um sistema. Quando aplicada na dimensão da informação, a entropia pode ser considerada como uma medida da quantidade de informação contida em um conjunto de dados ou de como a informação está distribuída dentro desse conjunto.

Historicamente a entropia surgiu na teoria da informação para calcular a quantidade de informação média necessária para representar ou codificar uma mensagem em um determinado sistema. Ela é calculada com base na probabilidade de ocorrência de diferentes eventos ou símbolos em um conjunto de dados.

O conceito central de entropia foi criado para medir a raridade ou surpresa esperada de uma variável aleatória X em sua distribuição. Na literatura, a entropia é, geralmente, considerada como informação. Ela quantifica a informação média necessária para descrever um conjunto de dados, considerando a distribuição de probabilidades dos eventos.

A entropia de Shannon é uma interpretação dos resultados através da quantificação da informação. Dessa forma, surge a oportunidade de medir a desorganização, ou a incerteza, e utilizá-la como informação da imagem, sendo que esta servirá de critério de classificação. A entropia pode ser entendida como uma

medida matemática, que define quantidade de informação necessária para descrever uma variável aleatória, ou como medida de incerteza acerca desta.

### 2.3.1.1 Algoritmo da dimensão da informação com a entropia de Shannon

No estudo, o conjunto de dados para a entropia é o resultado da quantidade de *pixels* distribuída em cada caixa e a dimensão da informação com a entropia refere-se à quantidade de informações diferentes e distintas que estão presentes em um conjunto de dados. Quanto maior a entropia, maior a variedade e a diversidade das informações contidas no conjunto.

Figura 13 – Algoritmo para o cálculo da dimensão com a entropia de Shannon

```

427 def CalculoDimensaoDaInfShannon():
428
429     global PontosDeShannon
430     x0=0
431     y0=0
432     WF= Paisagem.winfo_width()
433     HF= Paisagem.winfo_height()
434     global DesenhaBox
435     x=[]
436     y=[]
437     for Passos in range(1,9):
438         if Passos==8:
439             DesenhaBox=true
440             DI=2**Passos # número de divisões
441             W=(WF/DI) # largura dos box's
442             H=(HF/DI) # altura dos box's
443             EntropiaShannon=Entropia(x0,y0,W,H,WF,HF)
444             x.append(ln(1/min(W,H))) # W = H na figura quadrada
445             y.append(ln(EntropiaShannon))
446             PontosDeShannon.append(x)
447             PontosDeShannon.append(y) # Guarda pontos para plotagem dos gráficos
448     return(x,y)

```

Fonte: A autora (2023)

A entropia de Shannon no algoritmo, chama os parâmetros, a função contaPixelDaFiguraNoBox, conta os boxes da figura que contém pixels, n\_delta, bem como verifica a frequência em p\_delta, calculando a entropia H\_delta.

Figura 14 – Algoritmo da entropia de Shannon

```

450 def Entropia(x0,y0,W,H,WF,HF):
451     DH=0
452     DW=0
453     n_delta=[] # número de pixel da imagem no box delta
454     p_delta=[] # `probabilidade dada pela frequência de pixels na caixa delta
455     H_delta=0
456     while(DH*H<HF):
457         while(DW*W<WF):
458             cont=ContaPixelsDaFiguraNoBox(x0+DW*W, y0+DH*H, x0+(DW+1)*W, y0+(DH+1)*H)
459             if cont!= 0:
460                 n_delta.append(cont)
461                 DW=DW+1
462             DH=DH+1
463             DW=0
464     N=0 # N será o número total de pixels da figura
465     for i in range(len(n_delta)): # Calcula o total de Pixel
466         N=N+n_delta[i]
467     for i in range(len(n_delta)): # Calcula afrequênciam em cada caixa
468         p_delta.append(n_delta[i]/N)
469     for i in range(len(n_delta)): # Calcula a entropia da divisão delta
470         H_delta=H_delta+p_delta[i]*ln(1/p_delta[i])
471
472 return(H_delta)

```

Fonte: A autora (2023)

### 2.3.2 Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis

Constantino Tsallis vinha defendendo que a entropia precisava de um requinte para abranger muitos tipos de sistema, uma vez que para Tsallis, a entropia funciona perfeitamente até para certos limites. Sendo assim, em 1988, a generalização da estatística foi proposta, primeiramente, por Constantino Tsallis, generalização da entropia de Boltzmann, em seu artigo intitulado “Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics” (Tsallis, 1998).

A entropia de Boltzmann (Shannon) tem suas limitações, funciona até para certos parâmetros, mas, aqui, será apresentada uma entropia não extensiva, na qual depende de um parâmetro  $q$ , cujo nome é chamado de índice entrópico de Tsallis – forma de caracterizar correlações de um sistema, a interdependência de duas ou mais variáveis, particularmente o quanto forte elas são. Essa entropia vem sendo aplicada com sucesso para explicar o comportamento de sistemas complexos não extensivo.

Além disso, o parâmetro  $q$  potencializa a informação em cada caixa de tamanho  $\varepsilon$  e isso pode ser usado para distinguir melhor perturbações de fronteira.

A implementação da dimensão da Informação com a entropia de Tsallis:

Tabela 1 – Testes com o quadrado variando o índice entrópico q

<b>Quadrado variando o valor do índice</b>	
Índice q	Valor da entropia de Tsallis
q = 0,4	27,03771
q = 0,5	15,15823
q = 0,9	1,89600
q = 0,99	1,25488
q = 0,999	1,20549
q = 2	0,03943

Fonte: A autora (2023)

O cálculo da Dimensão da informação com a entropia de Tsallis é um importante aspecto do método, pois a escolha do parâmetro  $q$  que é de grande valor na dimensão, desta forma após uma análise da Tabela 1, nos permitiu determinar a complexidade dos sinais com  $q = 2$ , índice entrópico permaneceu na faixa 0,03, nos demais valores para  $q$  entre 0,9 e 0,999 nos resultados obtidos podemos observar que a dimensão no algoritmo permaneceu na faixa entre 1 e 2.

Assim, os índices para  $q$  entre 0 e 0,5 a variação da dimensão da informação acentua e apresenta resultados maiores que 15 para a dimensão fractal de informação com a entropia de Tsallis, uma boa opção para sua implementação.

### 2.3.2.1 Algoritmo da dimensão da informação com a entropia de Tsallis

No algoritmo da Figura 15 são definidas as funções da dimensão de informação com a entropia de Tsallis e os parâmetros são colocados, inclusive o  $q$ , índice entrópico  $q = 0,5$ , que produzem estimativas mais eficazes comprovados nos testes.

Figura 15 – Algoritmo para a dimensão da informação com a entropia de Tsallis

```

341 def DimensaoDaInfTSallis():
342
343     x,y=q_DimDaInfDeTSallis(0.5)
344     a,b=np.polyfit(x,y,1)
345     Texto="Dimensão Da Informação de TSallis:"+str(a)
346     Legenda.config(text=Texto)
347     Legenda.place(x=0,y=0)
348     app.mainloop()
349
350
351 def q_DimDaInfDeTSallis(q):
352
353     global PontosDeTSallis
354     x0=0
355     y0=0
356     WF= Paisagem.winfo_width()
357     HF= Paisagem.winfo_height()
358     global DesenhaBox
359     x=[]
360     y=[]
361     for Passos in range(1,9):
362         if Passos==8:
363             DesenhaBox=true
364             DI=2**Passos # número de divisões
365             W=(WF/DI) # largura dos box's
366             H=(HF/DI) # altura dos box's
367             EntropiaTS=EntropiaTSallis(q,x0,y0,W,H,WF,HF)

```

Fonte: A autora (2023)

Para a Entropia de Tsallis são determinados os parâmetros e, também, se define o  $x = \ln(1/\min(W, H))$  e o  $y = \ln$  da entropia de Tsallis. Abaixo o código apresenta a entropia de Tsallis, para os vetores  $n_{\Delta}$ ,  $p_{\Delta}$  e zera  $Sp_{\Delta}$ , a soma das frequências. Na Figura 16 o ‘cont’ representa o contapixel da figura, após varrer todas as caixas tem-se a dimensão para esta entropia.

Figura 16 – Algoritmo para a entropia de Tsallis

```

381 def EntropiaTSallis(q,x0,y0,W,H,WF,HF):
382     x0=0
383     y0=0
384     WF= Paisagem.winfo_width()
385     HF= Paisagem.winfo_height()
386     DH=0
387     DW=0
388     n_delta=[]
389     p_delta=[]
390     Sp_delta=0
391     while(DH*H<HF):
392         while(DW*W<WF):
393             cont=ContaPixelsDaFiguraNoBox(x0+DW*W, y0+DH*H, x0+(DW+1)*W, y0+(DH+1)*H)
394             if cont!=0:
395                 n_delta.append(cont)
396             DW=DW+1
397             DH=DH+1
398             DW=0
399     N=0
400     for i in range(len(n_delta)):
401         N=N+n_delta[i]
402     for i in range(len(n_delta)):
403         p_delta.append(n_delta[i]/N)
404     for i in range(len(n_delta)):
405         Sp_delta=Sp_delta+p_delta[i]**q #soma das frequências elevadas a q
406     S_delta=1/(q-1)*(1-Sp_delta)

```

Fonte: A autora (2023)

## CAPÍTULO III. LACUNARIDADE

### 3.1 DEFINIÇÃO

Mandelbrot (1983) observou que a dimensão fractal não é suficiente para uma caracterização completa da textura de objeto com propriedades fractais. Existem objetos fractais com mesma dimensão fractal e com diferente aparência em sua textura (Dong, 2000).

A lacunaridade é uma medida que depende da escala, pois estruturas que são homogêneas em pequenas escalas podem ser heterogêneas em escalas maiores e vice-versa (Plotnick; Gardner; O'Neill, 1993). Diferentes fractais podem apresentar a mesma dimensão fractal, enquanto que apresentam diferentes medidas de lacunaridade.

Embora as dimensões forneçam informações valiosas acerca da geometria dos objetos, o fato de objetos de formas completamente diferentes compartilharem a mesma dimensão fractal torna necessária a existência de outros métodos de análise dos objetos fractais (Barnsley *et al.*, 1988).

### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO DA LACUNARIDADE

Conforme o valor da lacunaridade, o objeto fractal é classificado como sendo mais ou menos homogêneo. Espera-se que nessas Figuras, os padrões que apresentam as lacunas de mesmo tamanho, com uma distribuição de massa mais homogênea, mostrem o índice de lacunaridade mais baixo, diferente das figuras que possuam lacunas com tamanhos variados. Seguem as figuras utilizadas na implementação da lacunaridade:

Figura 17 – Padrões utilizados para o cálculo do índice de lacunaridade, com mesma massa



Fonte: A autora ( 2023)

### 3.2.1 Modelo matemático

Não existe um único método para calcular a lacunaridade de objetos fractais, mas todos eles basicamente medem sua distribuição de massa. Utiliza-se o método de caixa deslizante atribuído no aplicativo FracDim, método este bem conhecido e de fácil implementação.

Se a imagem for digital, a lacunaridade mede sua distribuição de pixels como mostra na figura 18 o código com a função contapixelnoBox.

Uma caixa de tamanho  $r$  é colocada na origem da tela do FracDim, a partir do centro e o número de caixas com  $S$  de massa ocupados é contado. A caixa é movida ao longo de todo o conjunto de observações, e sua massa é calculada.

A lacunaridade é definida em função de  $P(S, r)$ , que é a fração de janelas de raio  $r$ , no formato quadrado que é mais fácil a implementação e com massa  $S$  que a forma contém, ou seja, representando o número de caixas ocupadas com massa "S" que é contado.

A caixa é movida ao longo de todo o conjunto de observações e sua massa é calculada. Este processo é repetido para todo o conjunto de observações, obtendo a distribuição de frequência da massa da caixa  $n(s, r)$ , e correspondentemente à distribuição de probabilidade  $P(s, r) = n(s, r)/N(r)$ , onde  $N(r)$  é o número total de caixas de tamanho  $r$  deslizadas na área de trabalho.

Pela definição  $P$  tem-se  $\sum P = 1$ , sendo  $P$  uma distribuição de probabilidade, permitindo momentos 1 e 2. A lacunaridade na escala  $r$  é dada pelo quociente de momentos.

### 3.2.2 Algoritmo do cálculo da lacunaridade

A lacunaridade, inicialmente, no código, define a função BoxDeslizante, determinando a global Paisagem para abrir o padrão, as caixas deslizam ( $C, r$ ), variando o  $C$  = centro e o  $r$  = raio.

Figura 18 – Função BoxDeslizante e ContaPixelDoBox definida

```

24 def BoxDeslizante(C,r):
25
26     global Paisagem
27
28     x1=C[0]-r
29     x2=C[0]+r
30     y1=C[1]-r
31     y2=C[1]+r
32     Paisagem.create_rectangle(x1, y1, x2,y2,outline="green", tags="ret")
33     app.update()
34
35 def ContaPixelsDoBoxr(xc,yc,r):
36
37     global Paisagem
38     global Img
39     ContPixel=0
40     x1=xc-r
41     x2=xc+r
42     y1=yc-r
43     y2=yc+r
44     for i in range(x1+1,x2-1):
45         for j in range(y1+1,y2-1):
46             if Img.getpixel((i,j))!=255:
47                 ContPixel=ContPixel+1
48
49     return(ContPixel)

```

Fonte: A autora (2023)

Na função contapixelDoBox (Figura acima), os parâmetros x e y do centro são definidos xc e yc importante para a lacunaridade, que é definida em função de P (S, r), que é a fração de janelas de raio r com massa S que a forma contém, ou seja, representando o número de caixas ocupadas com massa "S", que é contado, gerando a função NumeroDeBoxcomMassaS.

Figura 19 – Algoritmo da função NúmeroDeBoxcomMassaS

```

49
50 def NumeroDeBoxComMassaS(S,r):
51
52     Cont=0
53     for xc in range(r+1,128-r): # xc é o x do centro da janela
54         for yc in range(r+1,128-r): # yc é o y do centro da janela
55
56             if ContaPixelsDoBoxr(xc,yc,r)==S:
57                 Cont=Cont+1
58
59     return(Cont)
60
61 def TotalDePixelsDaImg():
62     global PixelsDaImg
63     cont=0
64     for i in range(128):
65         for j in range(128):
66             if Img.getpixel((i,j))!=255:
67                 cont=cont+1
68
69     PixelsDaImg=cont

```

Fonte: A autora (2023)

Por fim, no algoritmo do índice da lacunaridade, definem-se os momentos, com área de trabalho  $l = 128$ , tem-se o número de boxes com massa  $S$  e calcula-se o índice da lacunaridade aplicando o quociente dos momentos.

Figura 20 – Algoritmo para definir os momentos na lacunaridade

```

70
71 def Momentos(r):
72     l=128 # Tamanho da área de trabalho
73     Z1r=0
74     Z2r=0
75     Nr=(l-2*r)**2
76
77     for S in range(1,(1+2*r)**2):
78         Q_Sr=NumeroDeBoxComMassaS(S,r)/Nr
79         Z1r=Z1r+S*Q_Sr
80         Z2r=Z2r+(S**2)*Q_Sr
81
82     return(Z1r,Z2r)
83

```

Fonte: A autora (2023)

Figura 21 – Algoritmo da lacunaridade

```

85
86 def Lacunaridade(r):
87     Zr=Momentos(r)
88     Z1r=Zr[0]
89     Z2r=Zr[1]
90
91     if Z1r!=0 :
92         return(Z2r/(Z1r**2))
93     else:
94         return(0)
95 def CalculaLacunaridade():
96
97     x=[]
98     y=[]
99
100    for r in range(1,100):
101        print(r)
102        x.append(r)
103        y.append(Lacunaridade(r))
104
105    plt.plot(x,y)
106    plt.xlabel("r")
107    plt.ylabel("$\Lambda(r)$")
108    plt.title("Lacunaridade")
109    plt.show()

```

Fonte: A autora (2023)

## CAPÍTULO IV. APLICATIVO FRACDIM

### 4.1 MENU E FUNÇÕES DO APLICATIVO

Inicialmente, este aplicativo foi desenvolvido para a análise de imagens de fragmentos de paisagem e era denominado FracFor. O aplicativo apresenta até o momento cinco menus com diferentes funcionalidades (Figura 21) já em funcionamento.

O menu Paisagem contém as funções *Abrir*, *Salvar*, *Fechar* e *Sair*. O ícone *Abrir* funciona com imagem nos formatos JPG, PNG ou TIFF e pode ser carregada para edição. A função *Salvar*, neste primeiro arquivo de imagem e uma planilha com dados dos fragmentos, é salva.

No menu Fragmento, a função *Novo* permite delinear o fragmento definindo vértices de um polígono, enquanto a função *Deletar* apaga o polígono delineado e *Selecionar* escolhe o polígono para a análise.

Neste aplicativo foi acrescentada a barra de menu *Mais Dimensões e Gráficos*. Em *Mais Dimensões* aparecem as funções: Dimensão *Box-Counting*, Dimensão da Informação de Shannon, Dimensão da Informação de Tsallis para  $q = 0,5$ . Enquanto o menu *Gráficos* gera os gráficos das dimensões, resultados das medidas. No menu *Gráfico*, encontram-se as opções:

- ✓ gráfico da dimensão *Box-Counting*, podendo ser poligonal ou regressão linear;
- ✓ gráfico da dimensão da informação com a entropia de Shannon, também poligonal ou regressão;
- ✓ os dois no mesmo gráfico, a *Box-Counting* e a de Shannon, utilizados em parte do estudo para comparar;
- ✓ gráfico da dimensão da informação com a entropia de Tsallis para  $q = 0,5$ ;
- ✓ e por fim, o gráfico da dimensão da informação com a entropia de Tsallis.

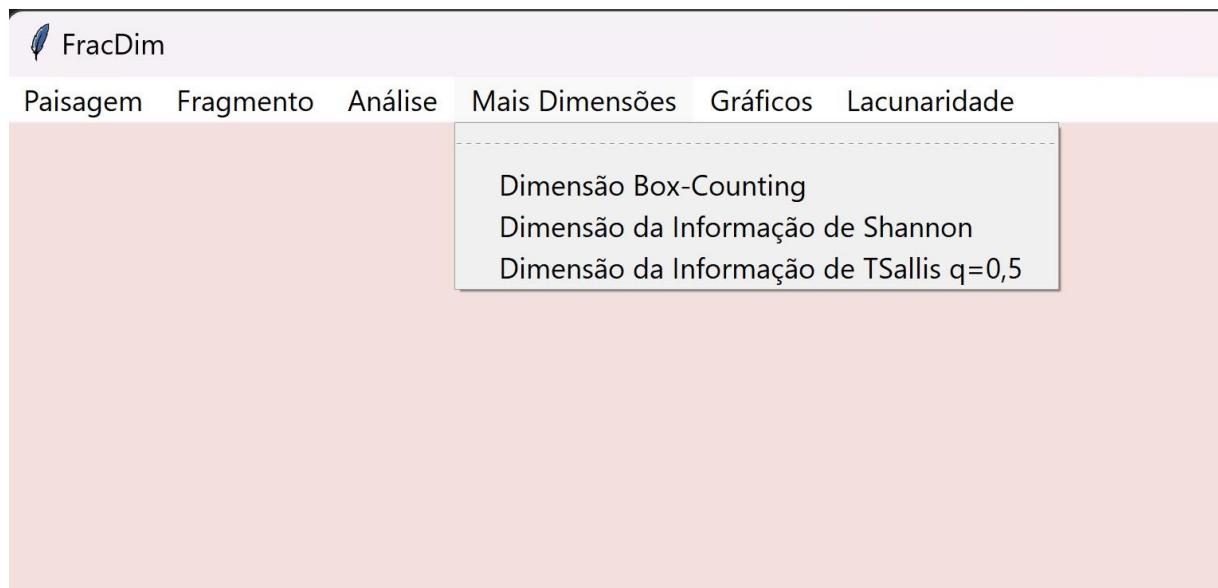
O último menu é o cálculo da lacunaridade, neste já plota o gráfico.

Para o algoritmo funcionar, organizou-se uma pasta denominada FracDim, na qual constam elementos importantes para seu funcionamento. As funções, algumas descritas nesta pesquisa, nas Figuras 9 e 13 e outras que mostram parte do código e a função def = define a função do algoritmo, além das variáveis e pacotes que são

outros elementos que constam na pasta. Todos os comandos na pasta FracDim.py são na linguagem Python.

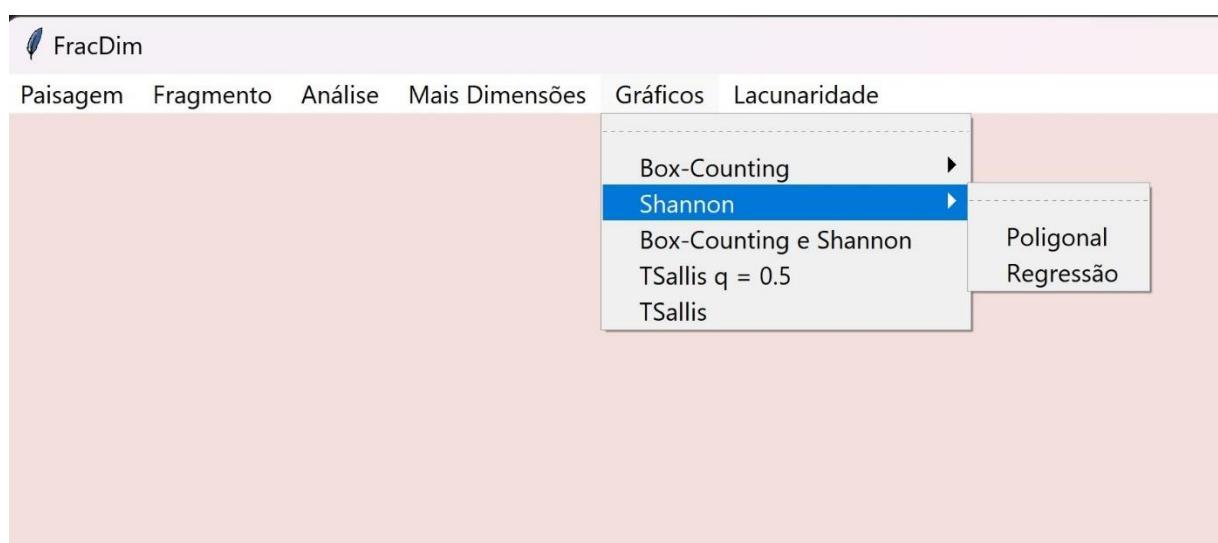
#### 4.2 NA PRÁTICA

Figura 22 – As dimensões fractais na barra de Menu do aplicativo FracDim



Fonte: A autora (2023)

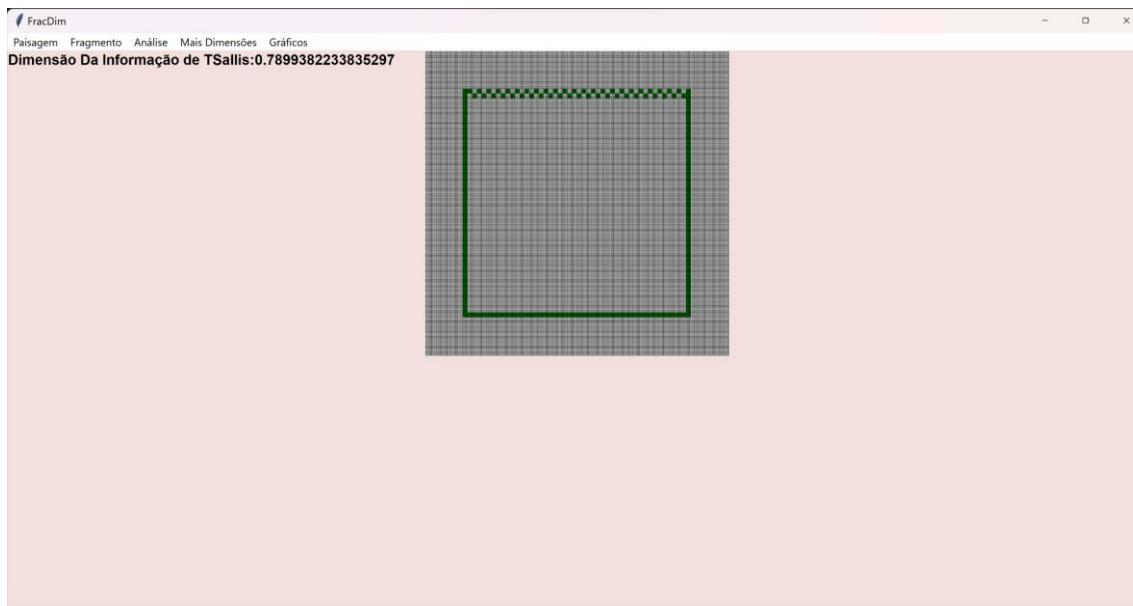
Figura 23 – Barra de Menu do FracDim na função Gráficos



Fonte: A autora (2023)

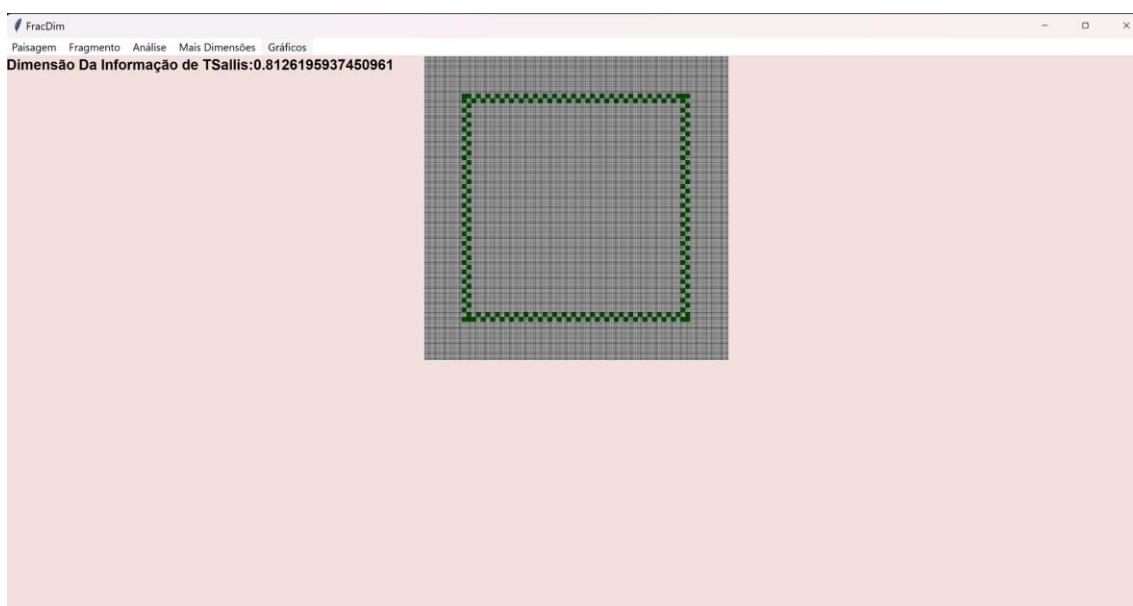
As figuras 24 e 25 mostram o aplicativo FracDim no uso para o cálculo da dimensão de informação com a entropia de Tsallis.

Figura 24 – Resultado da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis, no quadrado A com 1 lado perturbado



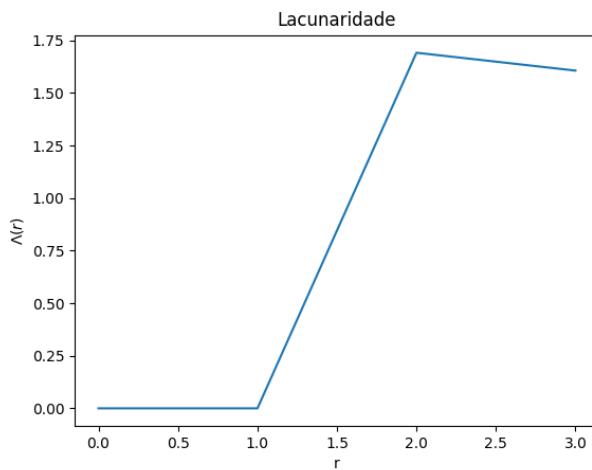
Fonte: A autora ( 2023)

Figura 25 – Resultado da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis, no quadrado D com os 4 lados perturbados



Fonte: A autora ( 2023)

Figura 26 – Gráfico do teste no aplicativo Fracdim do índice da lacunaridade com raio < 10 com o padrão C



Fonte: A autora ( 2024)

No aplicativo FracDim para o cálculo da lacunaridade, a caixa deslizante é movida ao longo de toda imagem e sua massa é calculada. Este processo é repetido para todo o conjunto de observações, obtendo a distribuição de frequência da massa da caixa  $n(s, r)$ , e correspondentemente à distribuição de probabilidade  $P(s, r)$ . O número total de caixas de tamanho  $r$  deslizadas na área de trabalho  $I = 128$  está na probabilidade e conforme o raio aumenta, cresce o valor da média sobre estas e a lacunaridade diminui até o limite em que a caixa captura a forma.

No código da lacunaridade, o quociente dos momentos é implementado, momento 2 por momento 1 ao quadrado, então definem-se os eixos  $x$  e  $y$ , no range o raio (1;100) que era o objetivo para uma representação gráfica mais clara e que proporcionasse uma melhor leitura da lacunaridade em função de  $r$ . Então, o FracDim plota o gráfico.

## CAPÍTULO V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 ANÁLISES DOS RESULTADOS DA BOX-COUNTING E DA DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO COM A ENTROPIA DE SHANNON

Foram gerados exemplos de figuras geométricas com pequenas perturbações de fronteira, onde pode-se observar a aplicação da dimensão da informação na resolução das ambiguidades da dimensão *Box-Counting*. Aplica-se, tanto a dimensão de informação de Shannon, quanto a de Tsallis.

Essa ambiguidade na Dimensão *Box-Counting* é apresentada nas Figuras de 5 até 8, em que os quadrados foram construídos com a mesma massa e apresentando fronteiras diferentes. Na Figura 5 a medida é gerada para o quadrado com 1 lado perturbado e a medida apresentada no FracDim é  $D_{Box} = 1,2796710276704335$ , enquanto que na Figura 8 o quadrado tem todos os 4 lados perturbados e obtém-se a mesma medida, ou seja, o índice apresentou ambiguidade para a dimensão *Box-Counting*.

A Tabela 2 demonstra, na segunda coluna, a ambiguidade da dimensão *Box-Counting*,  $D_{Box}$  ao obter os mesmos valores para os quadrados A, B, C e D. Além disso, na terceira coluna a dimensão da informação,  $D_S$  de Shannon:

Tabela 2 – Resultado da Dimensão *Box-Counting* e a Dimensão da Informação com a entropia de Shannon

Quadrado	$D_{Box}$	$D_S$
A	1,2796710276704335	0,33592615925964914
B	1,2796710276704335	0,33781554676065440
C	1,2796710276704335	0,33965496788217200
D	1,2796710276704335	0,34131330650656094

Fonte: A autora ( 2023)

A dimensão da Informação fornece mais detalhes, pois diferente da dimensão *Box-Counting*, que apenas conta as caixas que contêm a imagem, tem-se na DI o número de pixels ou pontos dentro de cada caixa e esse é expresso com a frequência relativa.

Assim, um peso é atribuído a cada caixa e as que possuem maior número de pontos contam mais do que as com menor número. Quando aplicada na equação, apresenta os resultados maiores, uma medida de complexidade que detecta a perturbação na figura.

### 5.1.1 Demonstração

É importante, também, observar nos gráficos das Figuras 5, 6 ,7 e 8, correspondentes aos quadrados perturbados A, B, C e D, que a dimensão da informação de Shannon é sempre menor que a dimensão *Box-Counting*, considerando-se que em todas as representações gráficas, a DI é menor que a  $D_{Box}$ , tem-se como provar matematicamente que isso é verdadeiro. Observando a desigualdade abaixo, pretende-se provar que:

DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO (DI)  $\leq$  DIMENSÃO BOX-COUNTING ( $D_{Box}$ ), sendo:

$$DI = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [H(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$D_{Box} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [n(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})}$$

De modo geral, a entropia das possibilidades forma o espaço amostral  $X= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e suas probabilidades  $P_i = P(x_i) =$  probabilidade de ocorrer  $x_i$ . Assim, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Sabe-se que a Entropia de Shannon é calculada por:

$$H(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln(p_i(\varepsilon))$$

Na entropia da informação, para cada box (caixas), pode-se determinar a frequência da imagem da seguinte forma:

$$f_i(\varepsilon) = \frac{m_i(\varepsilon)}{N},$$

para  $m_i$  = número de pixel da figura no box  $i$  e  $N$  = número total de pixels da figura.

Dessa forma:

$$H(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} f_i(\varepsilon) * \log [f_i(\varepsilon)]$$

$$H(\varepsilon) = \sum f_i \ln(1/f_i) \leq \sum f_i \cdot \frac{1}{f_i} \rightarrow \sum 1 = n(\varepsilon) \quad (1)$$

Para provar que a Dimensão da informação é menor ou igual a dimensão *Box-Counting*, tem-se que:

$$DI \leq D_{\text{Box}}$$

$$\frac{\ln [H(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})} \leq \frac{\ln [n(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})}$$

Por (1), tem-se:

$$H(\varepsilon) \leq n(\varepsilon)$$

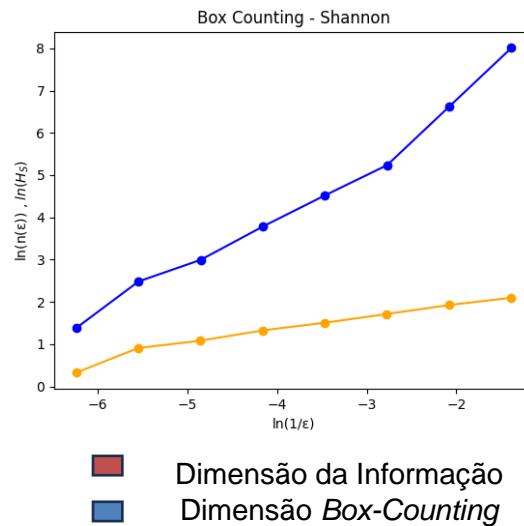
$\ln[H(\varepsilon)] \leq \ln[n(\varepsilon)]$ , então:

$$DI = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [H(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [n(\varepsilon)]}{\ln (\frac{1}{\varepsilon})} = D_{\text{Box}}.$$

### 5.1.2 Gráficos da Dimensão Box-Counting com a Dimensão da Informação com a entropia de Shannon

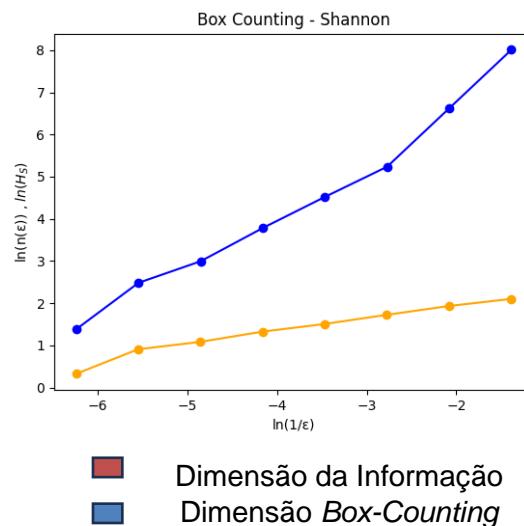
Em tais gráficos representa-se, no eixo  $y$ , o logaritmo neperiano do número de caixas que intersectam a figura e a entropia de cada uma das caixas, enquanto que ao longo do eixo  $x$ , representa-se o logaritmo neperiano de  $\frac{1}{\varepsilon}$ , onde  $\varepsilon$  é o comprimento do lado de cada caixa.

Figura 27 – Gráfico da Dimensão *Box-Counting* e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado A



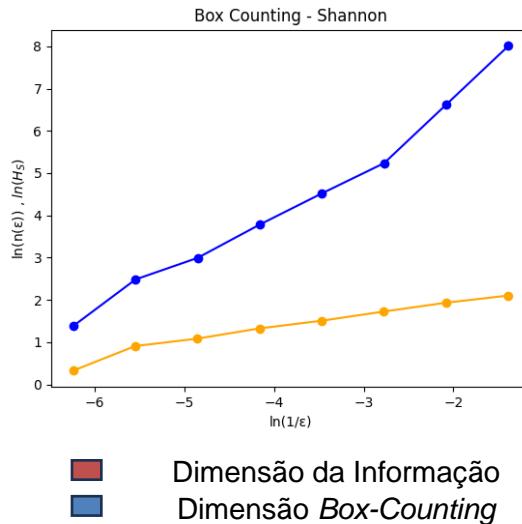
Fonte: A autora ( 2023)

Figura 28 – Gráfico da Dimensão *Box-Counting* e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado B



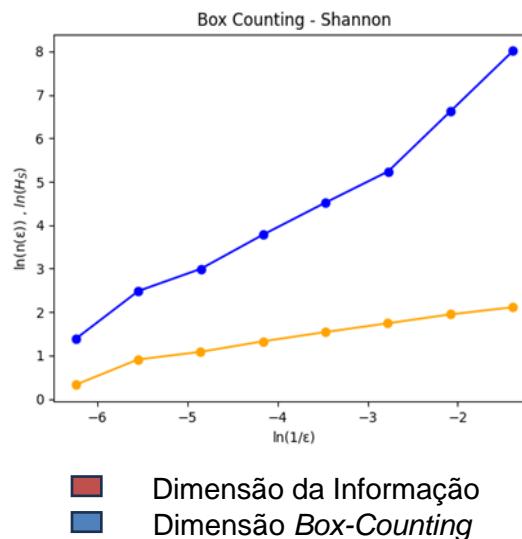
Fonte: A autora ( 2023)

Figura 29 – Gráfico da Dimensão *Box-Counting* e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado C



Fonte: A autora ( 2023)

Figura 30 – Gráfico da Dimensão *Box-Counting* e Dimensão da Informação com a entropia de Shannon para o quadrado D



Fonte: A autora ( 2023)

## 5.2 DIMENSÃO DA INFORMAÇÃO COM A ENTROPIA DE TSALLIS

Neste trabalho, ineditamente, introduziu-se a entropia de Tsallis no índice da Dimensão da Informação o que permitiu uma ênfase maior no conhecimento contido em cada caixa, devido ao seu parâmetro entrópico  $q$ . Tal parâmetro possibilitou a modulação da sensibilidade à informação como mostram as Figuras 24 e 25.

O conceito de entropia identifica quando um conjunto de dados é composto apenas por poucos símbolos tornando a entropia baixa, pois há pouca variedade de informações. Por outro lado, em um conjunto de dados com uma distribuição uniforme de diferentes símbolos, a entropia seria alta, pois há uma maior diversidade de informações.

O aplicativo revela resultados onde as fronteiras dos quadrados, com 1 lado perturbado, têm uma medida menor que a Dimensão da Informação no quadrado com os 4 lados perturbados, o que pode ser útil em diferentes aplicações práticas.

Na Tabela 3 foi feita a mesma análise dos resultados encontrados da *Box-Counting*, comparada à Dimensão da Informação, desta vez aplicando a entropia de Tsallis para o parâmetro  $q = 0.5$ .

Tabela 3 – Resultado da Dimensão *Box-Counting* e a Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis

Quadrado	$D_{Box}$	$D_{TS}$
A	1,2796710276704335	0,7899382233835297
B	1,2796710276704335	0,7976331670012815
C	1,2796710276704335	0,8054932828767232
D	1,2796710276704335	0,8126195937450961

Fonte: A autora ( 2023)

Observa-se que os valores da entropia foram acentuados pelo parâmetro  $q$ , o que pode ser útil em certos problemas práticos. Isso pode ser exemplificado pela Figura 31, que representa a variação da entropia de Tsallis, no quadrado A.

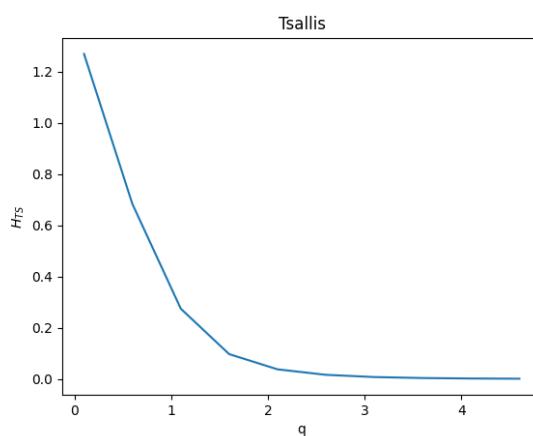
Tem-se em todos os gráficos que representam a Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis, o quanto acentua o valor da entropia para o parâmetro entrópico  $q = 0,5$  e assim torna-se esse parâmetro indicado para testes com outros dados.

### 5.2.1 Gráficos da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis

A estatística de Tsallis surgiu como extensão da mecânica estatística padrão, que é baseada na entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon. Nessa linha, as aplicações bem-sucedidas da entropia de Tsallis motivaram à pesquisadora a investigar a ferramenta matemática por trás dessa estrutura.

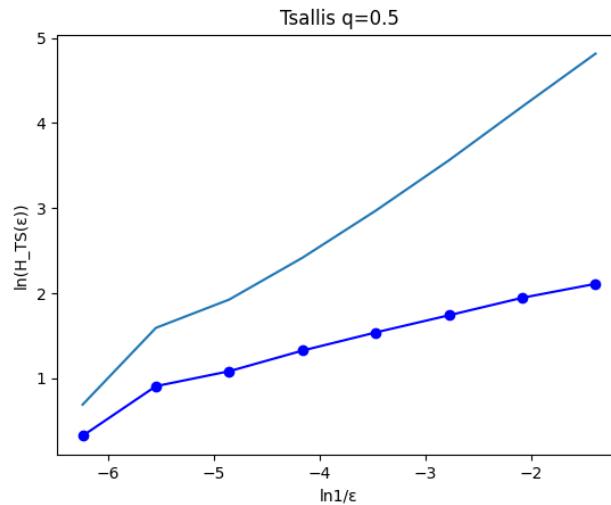
Ao comparar as análises da dimensão da informação usando entropia de Shannon e entropia de Tsallis, podem-se observar diferenças na sensibilidade a diferentes distribuições de probabilidade. A entropia de Tsallis foi proposta como uma generalização da entropia de Shannon, que incorpora um parâmetro adicional  $q$ . Essa generalização permite capturar características de dependência de longo alcance ou dependência de ordem superior que podem estar presentes em alguns sistemas complexos.

Figura 31 – Gráfico da Dimensão da Informação com a entropia de Tsallis do quadrado A, com 1 lado perturbado



Fonte: A autora ( 2023)

Figura 32 – Gráfico da Dimensão da Informação com a entropia de Shannon e de Tsallis do quadrado D, com 4 lados perturbados



Fonte: A autora ( 2023)

A curva da entropia de Shannon, comparada à de Tsallis na Figura 32, revela que a entropia cresce monotonicamente com o aumento do número de possibilidades i, para esta entropia o eixo x é o  $\ln(1/\epsilon)$  da altura e largura da caixa quadrada, onde a distribuição de probabilidade é dada pela frequência da figura em cada caixa e o resultado da quantidade de pixels distribuída em cada caixa são os dados da incerteza probabilística ligada a quantidade total de caixas (eventos). No eixo y é a dimensão da informação com o  $\ln$  da entropia.

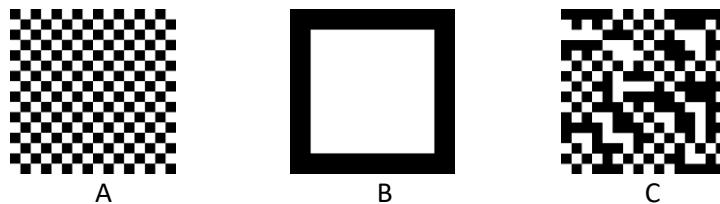
A variação nos gráficos com a entropia de Tsallis são sutis, apesar das fronteiras modificadas, observa-se na Figura 31 que a curva em que o eixo x é o parâmetro q, e este é uma medida no gráfico verifica-se um crescimento entre 0 e 1, tem entropia maior, mostrando o índice entrópico 0,5 de maior relevância para ser utilizado em aplicações em biossistemas.

O algoritmo da dimensão da informação com a entropia de Tsallis é principalmente uma boa opção para sua implementação.

### 5.3 RESULTADOS ESPERADOS EM GRÁFICOS DA LACUNARIDADE PARA OS PADRÕES A, B E C

Tem-se:

Figura 33 – Padrões para o cálculo do índice de lacunaridade



Fonte: A autora ( 2023)

Tabela 4 – Resultados das dimensões da Informação com a entropia de Shannon e Tsallis nos padrões A, B e C

Padrões	$D_S$	$D_{TS}$
A	0,3892662822126259	1,0667203264153013
B	0,3957565795875759	1,0505964536385166
C	0,3897991498866205	1,0622756438613044

Fonte: A autora (2024)

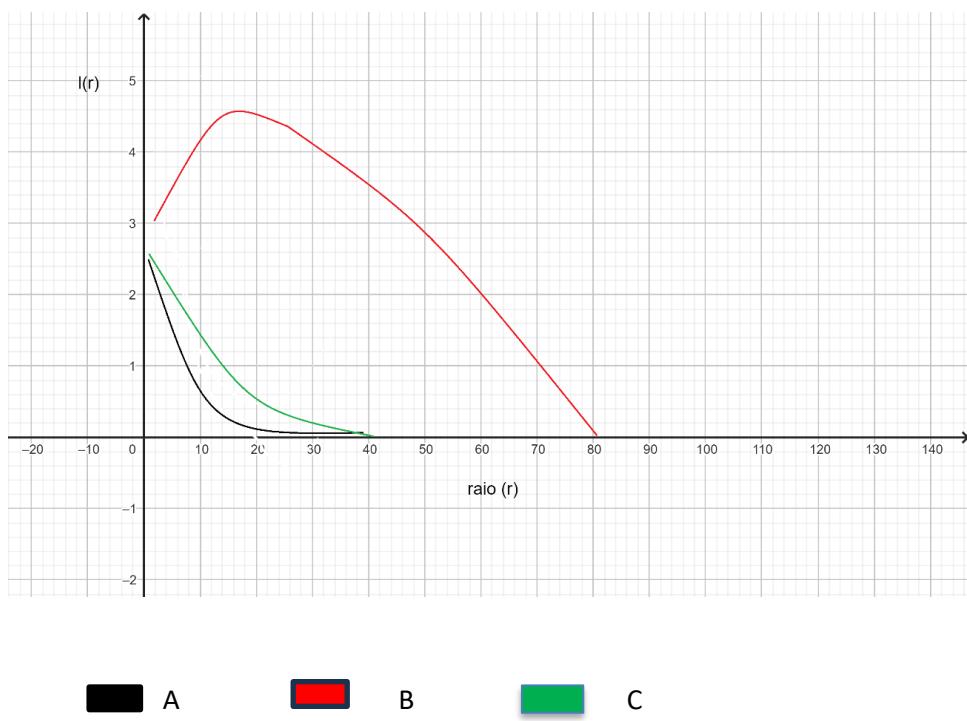
Os padrões A, B e C, de mesma massa, quando utilizados para a dimensão da informação com a entropia de Shannon, primeira medida na tabela 4, apresentaram resultados com poucas alterações na medida da dimensão e o padrão B mostra ser a maior medida na dimensão da informação com a entropia de Shannon. Com a entropia de Tsallis, o padrão B apresenta menos informação, logo sua dimensão é menor, o que mostra a importância da presença do parâmetro  $q$  na identificação de mudanças no padrão da imagem.

Assim, no padrão B a entropia de Shannon não sinalizou a textura, enquanto que a de Tsallis pelo padrão ser simples garante menor resultado.

Para valores baixos de  $r$ , a lacunaridade é um índice somente da porcentagem ou da quantidade de pixels da forma, quanto de massa, independente da sua

geometria. Porém, conforme aumenta o raio( $r$ ) das caixas, acentua a curva, cresce o valor da lacunaridade  $l(r)$ .

Figura 34 – Gráfico do resultado esperado do índice de lacunaridade dos padrões A, B e C com raio  $> 40$



Fonte: A autora ( 2023)

Observa-se a lacunaridade  $L = 1$  para  $r = 9$  no padrão A,  $L = 1$  para  $r$  entre 10 e 15 no padrão C, porém o padrão B, a lacunaridade é maior que 3 com o raio ainda entre 0 e 5, a distribuição da massa, os pixels mais aglutinados, o valor da lacunaridade é mais alto na maior parte da escala em análise. Esses são os resultados esperados porém, utilizamos o método de caixa deslizante atribuído no aplicativo FracDim, este aplicativo está em teste para o cálculo da lacunaridade, o qual obtivemos resultados rápidos em raios abaixo de 20, o método já foi aplicado em outros estudos com raios maiores, porém há necessidade de uma máquina com processador mais eficiente.

A lacunaridade tem grande importância na ecologia. Para esta pesquisa pode-se avançar com organismos, citando, inicialmente, as formigas, considerando uma

dimensão para caracterizar a extensão de agrupamentos espacial, sendo cada mudança dentro do espaço bidimensional.

Nos padrões, pode-se representar a espécie em pontos para obter a dimensão da trajetória de movimento validado, a partir de relatórios anteriores.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo explorou a aplicação da dimensão da informação, baseada na entropia de Shannon e Tsallis, na detecção de perturbações de fronteira em objetos que podem ser representados por figuras planas. Demonstrou-se, através de construções específicas, que a dimensão da informação é capaz de resolver ambiguidades geradas pela dimensão *Box-Counting*, obtendo então uma maior precisão na análise da complexidade das fronteiras de objetos modelados no plano.

Os resultados obtidos revelaram que quadrados com perturbações sutis em seus contornos apresentaram a mesma dimensão *Box-Counting*, mas diferentes dimensões da informação. Evidenciou-se a sensibilidade da entropia à distribuição de informações em cada caixa, podendo se tornar uma ferramenta mais eficaz na detecção de irregularidades.

Além disso, neste trabalho introduziu-se a entropia de Tsallis, o que permitiu uma ênfase maior nas informações contidas em cada caixa, devido ao seu parâmetro entrópico  $q$ . Tal parâmetro possibilitou a modulação da sensibilidade à informação, o que pode ser útil em diferentes aplicações práticas.

A importância deste estudo reside na comprovação experimental de que a dimensão da informação pode ser aplicada com sucesso na distinção de perturbações de fronteira em objetos planos. Essa abordagem tem potencial para ser aplicada em diversas áreas, incluindo ecologia, detecção de patologias em células e folhas, bem como no monitoramento de áreas como florestas.

Em resumo, os resultados obtidos mostram à pesquisadora que a dimensão da informação representa uma ferramenta valiosa ao analisar a detecção de perturbações de fronteira e, consequentemente, na análise da complexidade de objetos, enquanto que o índice de lacunaridade no FracDim correspondeu ao esperado, ou seja, o padrão com maior espaço vazio mostrou maior lacunaridade, porém, também, ficou claro que a figura com padrões aleatórios pode variar a lacunaridade dependendo de alguns parâmetros, como a quantidade de área de lacunas, a dimensão da forma e o raio da caixa. Assim, esse estudo segue abrindo caminho para novos desenvolvimentos e aplicações futuras.

## REFERÊNCIAS

- BARNESLEY, M. F.; DEVANEY, R. L.; MANDELBROT, B. B.; PEITGEN, H. O.; SAUPE, D.; VOSS, R. F. **The science of fractal images.** [s. l.]: Springer, 1988.
- BEKENSTEIN, J. D. Some comments on Boltzmann-Gibbs statistical mechanics. **Phys. Rev.** v. 7, 1973.
- CARVALHO, S. B.; NASCIMENTO, A. ; TEÓFILO, A. Applications of the Information Dimension in Detecting Border Perturbations. **Journal of Bioengineering, Technologies and Health** v. 6, supplement 2, p. 44-50, december, 2023. Disponível em: <http://www.jbth.com.br/index.php/JBTH/issue/view/39/43>. Acesso em: 04 dez. 2023.
- CONJUNTO de Cantor. *In: Wikipédia, a enciclopédia livre.* Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_Cantor](https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor) Acesso em: 04 dez. 2023.
- DONG, P. **Lacunarity for spatial heterogeneity measurement in GIS.** Geographic Infromation Sciences, v. 6, n.1, p. 20-26, 2000.
- ESPONJA de Menger. *In: Wikipédia, a enciclopédia livre.* Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Esponja\\_de\\_Menger](https://pt.wikipedia.org/wiki/Esponja_de_Menger). Acesso em: 04 mar. 2023.
- FALCONER, K. **Fractal geometry:** Mathematical foundations and applications. 3. ed. Inglaterra: John Wiley & Sons Ltda., 2014.
- GUERRA, R. L. **Fractal Model for Morphological Representation of Capsicum annuum L. in 3D.** Maio 2017. Disponível em: [https://www.researchgate.net/figure/Box-Counting-Method-applied-to-calculate-the-fractal-dimension-of-Capsicum-annuum-L\\_fig1\\_317083329](https://www.researchgate.net/figure/Box-Counting-Method-applied-to-calculate-the-fractal-dimension-of-Capsicum-annuum-L_fig1_317083329). Acesso em: 03 mar. 2023.
- HALLEY, J. M.; HARTLEY, S.; KALLIMANIS, A. S.; KUNIN, W. E.; LENNON, J. J.; SGARDELIS, S. P. Uses and abuses of fractal methodology in ecology. **Ecology Letters, Ecology Letters**, v. 7, n. 3, p. 254-271, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2004.00568.x>. Acesso em: 03 mar. 2023.
- KRUMMEL, J. R. ; GARDNER, R. H.; SUGIHARA, G.; O'NEILL, R. V.; COLEMAN, P. R. Landscape patterns in a disturbed environment. **Oikos**, v. 48, n. 3, p. 321-324, 1987.
- LANG, S.; BLASCHKE T. **Análise da paisagem com SIG.** Oficina de Textos, São Paulo, 2009.
- LIMA, I. P. **Entropia de Tsallis aplicada à inversão sísmica.** Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2021.

LOPEZ, R.; FROHN, R. **Remote sensing for landscape ecology:** Monitoring, modeling, and assessment of ecosystems. 2. ed., Flórida: CRC Press, 2017.

LORENZ, E. N. **Essência do caos.** Tradução de Cláudia Bentes David. Brasília: Universidade de Brasília, 1996.

LOVEJOY, S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. **Science**, v. 216, n. 4542, p. 185-187, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1126/science.216.4542.185>. Acesso em: 04 jan. 2023.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature.** New York: WH freeman New York, 1983.

MATOS, P. S. **Medidas fractais aplicadas à classificação de texturas.** Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2019.

NEWMAN, E. A.; KENNEDY, M. C.; FALK, D. A.; MCKENZIE, D. Scaling and complexity in landscape ecology. **Front. Ecol. Evol.**, v. 7, n. 293, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.3389/fevo.2019.00293>. Acesso em: 04 jan. 2023.

PICOLI, J. R. S.; MENDES, R. S.; MALACARNE, L. C.; SANTOS, É R. P. B. q-distributions in complex systems: A brief review. **Braz. J. Phys.** v. 39, 2009.

PLOTNICK, R. E.; GARDNER, R. H.; O'NEILL, R. V. Lacunarity indices as measures of landscape texture. **Landscape Ecology**, v. 8, p. 201-211, 1993.

RODRIGUES, E. P. Lacunaridade para caracterização de formas de dimensão finita. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2004.

ROSENBERG, E. **Fractal dimensions of networks.** [s. l.]: Springer International Publisher, 2020.

SEURONT, L. **Fractals and multifractals in ecology and aquatic science.** USA: Taylor e Francis Group, LLC, 2010.

SHANNON, C. A mathematica theory of communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27. p. 379-423, 1948.

STEWART, I. **Os Números da Natureza:** a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Ed. Rocco, 1996. 122 p.

TRIÂNGULO de Sierpinski. In: **Wikipédia**, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_de\\_Sierpinski](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski). Acesso em: 06 jun. 2023.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics: J. Stat. **Phys.**, v. 52, 1998.

TSALLIS, C. Beyond Boltzmann–Gibbs–Shannon in Physics and Elsewhere. **Entropy**, v. 21, 696, 2019.

YU, H; LIU, X.; KONG, B.; LI, R.; WANG, G. Landscape ecology development supported by geospatial technologies: A review. **Ecological Informatics**, v. 51, p. 185-192. ISSN 1574-9541, 2019.