

Stefanie Chaves dos Santos

# **Análise Fractal de Fragmentos Florestais**

Brasil

15 de maio de 2023

Stefanie Chaves dos Santos

## **Análise Fractal de Fragmentos Florestais**

Dissertação de Mestrado apresentada a Universidade do Estado da Bahia, Curso de Modelagem e Simulação de Biossistemas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem e Simulação de Biossistemas.

Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas

Orientador: Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento

Coorientador: Maria Dolores Ribeiro Orge e Mara Rojane Barros de Matos

Brasil

15 de maio de 2023

Sistema de Bibliotecas da UNEB  
Biblioteca Carlos Drummond de Andrade – Campus II  
Manoela Ribeiro Vieira  
Bibliotecária – CRB 5/1768

S217a Santos, Stefanie Chaves dos Santos  
Análise fractal de fragmentos florestais/ Stefanie Chaves dos Santos –  
Alagoinhas, 2023.  
77 f. : il

Orientador: Prof.<sup>o</sup>. Dr.<sup>o</sup>. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento.  
Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Dolores Ribeiro/ Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mara Rojane  
Barros de Matos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado da Bahia,  
Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Alagoinhas, 2023.

1. Paisagens – Fragmentos. 2. Geometria fractal. 3. Recuperação florestal.  
I. Nascimento, Antônio Teófilo Ataíde do. II. Ribeiro, Maria Dolores. III.  
Matos, Mara Rojane de. IV. Universidade do Estado da Bahia –  
Departamento de Ciências Exatas e da Terra – Campus II. V. Título.

CDD – 577

**FOLHA DE APROVAÇÃO**  
**"ANÁLISE FRACTAL DE FRAGMENTOS FLORESTAIS"**

**STEFANIE CHAVES DOS SANTOS**


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Simulação de Biossistemas – PPGMSB, em 19 de abril de 2023, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestra em Modelagem e Simulação de Biossistemas pela Universidade do Estado da Bahia, conforme avaliação da Banca Examinadora:

Professor(a) Dr.(a) ANTÔNIO TEÓFILO ATAÍDE DO NASCIMENTO

UNEB

Doutorado em Matemática

Universidade Federal da Bahia


Documento assinado digitalmente  
 ANTONIO TEOFILO ATAIDE DO NASCIMENT  
Data: 24/04/2023 08:27:55-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Professor(a) Dr.(a) MARA ROJANE BARROS DE MATOS

UNEB

Doutorado em Botânica

Universidade Estadual de Feira de Santana


Documento assinado digitalmente  
 MARA ROJANE BARROS DE MATOS  
Data: 02/05/2023 14:06:23-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Professor(a) Dr.(a) ALARCON MATOS DE OLIVEIRA

UNEB

Doutorado em Geografia (Geografia Física)


Universidade de São Paulo

Documento assinado digitalmente  
 ALARCON MATOS DE OLIVEIRA  
Data: 24/04/2023 10:36:35-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Professor(a) Dr.(a) FÁBIO RODRIGUES SANTOS

IFBA

Doutorado em Doutorado em Modelagem Computacional e Tecnologias Industriais  
Centro Universitário SENAI-CIMATEC

Documento assinado digitalmente  
 FABIO RODRIGUES SANTOS  
Data: 25/04/2023 11:08:01-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>



*Este trabalho é dedicado ao meu Deus,  
o criador de todas impressionantes leis da natureza.*

# Agradecimentos

Eu agradeço primeiramente a Deus, que me deu condições que chegar ao final de mais essa jornada. Agradeço também a minha família, em especial a minha mãe, amigos e colegas do mestrado, cujo apoio durante os últimos anos foi um enorme consolo e me ajudou a nunca pensar em desistir.

Também queria agradecer aos professores do mestrado, em especial ao meu orientador Teófilo Nascimento, que me apresentou a Geometria Fractal, pela sempre presente disponibilidade e paciência, a Dolores Orge pela atenção e carinho, e as Mara Rojane e Gracineide de Almeida pelos valiosos materiais que enriqueceram grandemente meu trabalho.

*“Quem investiga os registros da história  
descobre que os cristãos que fizeram mais pelo  
mundo presente foram justamente aqueles  
que mais pensavam no porvir.” (C.S. Lewis)*

# Resumo

Desde o seu surgimento, a geometria fractal tem sido amplamente utilizada no estudo de diversos objetos naturais, como fragmentos de paisagens. Devido a difusão das dimensões perímetro-área como uma métrica de paisagem, buscou-se uma forma de utilizá-la no planejamento de recuperação de paisagens fragmentadas de modo a minimizar os efeitos de borda. O método foi denominado expansão de fragmentos e consiste na delimitação das áreas de recuperação. Adicionalmente, foi desenvolvido um aplicativo em linguagem Python para a aplicação do método na análise de imagens de paisagens florestais. Além disso, foi desenvolvido um estudo do efeito da constante de proporcionalidade da dimensão perímetro-área na oscilação da dimensão com variação do tamanho do fragmento.

**Palavras-chaves:** Dimensão perímetro-área; ecologia de paisagens; geometria fractal; recuperação florestal.

# Abstract

Since its creation, fractal geometry has been widely used in the study of many natural objects, as forestry patches. Due to the spread of the perimeter-area dimensions as a landscape metric, a way to utilize it in the planning of recuperation of fragmented landscapes was sought in order to minimize the edge effects. The method was named patch expansion and consists in the delimitation of the recovery areas. Additionally, an app based on Python language was developed for the application of the method in the analysis of forestry landscapes' images. A study of the effect of the perimeter-area dimension's proportionality constant in the dimension's fluctuation with patch's size variation was also developed.

**Key-words:** Perimeter-area dimension; landscape ecology; fractal geometry; forestry recovery.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapa de fragmentos florestais da Bacia do Rio Catu. . . . .	26
Figura 2 – Uma homotetia de razão 4 foi aplicada no polígono $H_0$ para a obtenção do polígono $H_1$ . . . . .	27
Figura 3 – Gráfico da dimensão fractal, $D(l)$ , de diferentes polígonos regulares em função do comprimento de seu lado, $l$ . . . . .	29
Figura 4 – Decágono irregular com dimensão fractal igual a 1. . . . .	30
Figura 5 – Pentágono irregular $RVSTU$ com dimensão fractal igual a 1 criado a partir da expansão do quadrado $RSTU$ . . . . .	30
Figura 6 – Lugar geométrico de pontos $V$ que satisfazem a Equação (3.4) para o lado $RS$ do quadrado $RSTU$ . . . . .	31
Figura 7 – Lugar geométrico que satisfaz a Equação (3.4) em um quadrado cujos lados não são paralelos ao eixos coordenados. . . . .	32
Figura 8 – Dado o quadrado $RSTU$ , o ponto $V = (10, 10)$ não pertence à curva de expansão. . . . .	32
Figura 9 – Expansão do pentágono $RVSTU$ da Figura 5 no hexágono $RWVSTU$ com dimensão fractal igual a 1. . . . .	33
Figura 10 – As diferentes possibilidades para a curva de expansão dependendo da dimensão fractal do polígono. . . . .	35
Figura 11 – A curva de expansão é delimitada pela retas $x = -2,42022$ e $x = 5,52158$ , soluções da Equação (3.7) para o polígono descrito. . . . .	36
Figura 12 – Uma vez que o lado de expansão de polígono não coincide com o eixo $oy$ as retas fornecidas pelas raízes da Equação (3.7) não delimitam a curva de expansão, contudo, através de rotação e translação inversos aos necessários para levar o lado de expansão ao eixo $oy$ é possível fazer com que as retas delimitem a curva de expansão para um lado não-paralelo ao eixo $oy$ . . . . .	36
Figura 13 – Conforme os resultados obtidos com a aplicação do teste da Equação (3.7), os lados destacados em verde admitem expansão, enquanto os lados que não admitem expansão foram destacados em vermelho. . . . .	37
Figura 14 – Curvas obtidas fixando o perímetro e a área na Equação (3.7) de acordo com os valores obtidos nos polígonos da Figura 13. . . . .	38
Figura 15 – Hexágono $RWZSTU$ com dimensão fractal igual a 1 criado a partir da expansão por trapézio do quadrado $RSTU$ . . . . .	40

Figura 16 – Lugar geométrico dos pontos $W$ e $Z$ tais que $RWZSTU$ é um hexágono com dimensão fractal, conforme a Equação (1.5), igual a 1 e o quadrilátero $RWZS$ é um trapézio isósceles, para um quadrado $RSTU$ cujo lado $RS$ é paralelo ao eixo $oy$ e $S$ coincide com a origem. . . . .	41
Figura 17 – Curva de expansão do quadrado $RSTU$ para $RS$ não paralelo ao eixo $oy$ . . . . .	42
Figura 18 – Expansão de um heptágono qualquer para um eneágono com dimensão fractal igual a 1. . . . .	42
Figura 19 – A curva de expansão por trapézio do lado $V_1V_2$ do heptágono $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7$ é simétrica em relação a reta $r$ que é ortogonal ao lado de expansão e passa por seu ponto médio. . . . .	43
Figura 20 – O eneágono $E$ de vértices consecutivos $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8$ e $V_9$ tem perímetro e área respectivamente iguais a 137,65707138873026 e 1168,5. De acordo com a Equação (3.7), seu lado $V_1V_2$ de comprimento 20 não pode ser expandido, contudo através da expansão por pentágono conseguimos dois pontos $V_{10}$ e $V_{11}$ que expandem $E$ em um undecágono com dimensão fractal igual a 1. . . . .	44
Figura 21 – Gráficos da dimensão fractal, $D(l)$ , de um pentágono regular em função do comprimento de lado $l$ para diferentes valores de $k$ . . . . .	46
Figura 22 – Reta de regressão do logaritmo do perímetro contra o logaritmo da área das homotetias do polígono visto na Figura 2. . . . .	47
Figura 23 – Para elementos da natureza em que se espera que o formato seja mantida durante o crescimento, cada fase subsequente é uma homotetia aproximada da original e deve manter uma dimensão perímetro-área próxima de 1 para a constante do objeto original. . . . .	49
Figura 24 – Foto da Amostra 01 das sementes de <i>Zeyheria tuberculosa</i> (Vell.) Bureau ex Verl. A imagem da direita mostra o contorno da semente feito com o uso do aplicativo FracFor. . . . .	50
Figura 25 – Sementes de <i>Zeyheria tuberculosa</i> (Vell.) Bureau ex Verl cujas constantes de proporcionalidade perímetro-área foram utilizadas para o cálculo da dimensão do grupo. . . . .	52
Figura 26 – Interface do aplicativo. . . . .	67
Figura 27 – Imagem de uma paisagem carregada através da função Abrir. . . . .	67
Figura 28 – Polígonos criados utilizando a função Novo. . . . .	68
Figura 29 – Deslocamento de um vértice feito através da função Editar. . . . .	68
Figura 30 – Criação de um novo vértice feito através da função Editar. . . . .	69
Figura 31 – Remoção de um vértice feito através da função Editar. . . . .	69
Figura 32 – Resultado da análise de um polígono. . . . .	70
Figura 33 – Ponto da curva de expansão que expandiria o polígono analisado através da adição de um triângulo isósceles. . . . .	70

Figura 34 – Curva de expansão do lado selecionado. . . . .	71
Figura 35 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem A. . . . .	71
Figura 36 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem B. . . . .	72
Figura 37 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem C. . . . .	72



# Lista de tabelas

Tabela 1	–	Valores aproximados da constante de proporcionalidade, $k$ , para alguns polígonos regulares calculados através da Equação (1.9). . . . .	24
Tabela 2	–	Dados de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ), calculada através da Equação (1.5), dos Polígonos A e B da Figura 2. .	28
Tabela 3	–	Os valores de comprimento do lado e as raízes da Equação (3.7) para cada um dos lados da Figura 13a. . . . .	37
Tabela 4	–	Os valores de comprimento do lado e as raízes da Equação (3.7) para cada um dos lados da Figura 13b. . . . .	38
Tabela 5	–	Tabela contendo os valores de razão de homotetia ( $R_H$ ), perímetro ( $P$ ) e área ( $A$ ) utilizados no gráfico da Figura 22. . . . .	48
Tabela 6	–	Valores de $k$ , de acordo com a Equação (5.1) para alguns dos polígonos apresentados. . . . .	49
Tabela 7	–	Dados do Grupo A. . . . .	51
Tabela 8	–	Dados do Grupo B. . . . .	51
Tabela 9	–	Dados do Grupo C. . . . .	51
Tabela 10	–	Desvio padrão dos valores de dimensões perímetro-área em cada grupo.	53
Tabela 11	–	Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem A (Figura 35). . . . .	73
Tabela 12	–	Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem B (Figura 36). . . . .	73
Tabela 13	–	Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem C (Figura 37). . . . .	73

# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>ESTADO DA ARTE</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Geometria Fractal</b>	<b>17</b>
1.1.1	Auto-similaridade e Auto-afinidade	17
1.1.2	Dimensão Fractal	17
1.1.2.1	Dimensão de Hausdorff	18
1.1.2.2	Dimensão Box-counting	18
1.1.3	Lacunaridade	18
<b>1.2</b>	<b>Geometria Fractal aplicada à Ecologia de Paisagem</b>	<b>19</b>
1.2.1	Escalas	19
1.2.2	Leis de Potência	21
<b>1.3</b>	<b>Métricas Fractais de Paisagem</b>	<b>21</b>
1.3.1	Dimensão Perímetro-Área	21
1.3.1.1	Constante $k$ para malhas quadradas	22
1.3.1.2	Constante $k$ para diferentes formatos de malha	23
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Métodos</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Materiais</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>EXPANSÃO POR TRIÂNGULO</b>	<b>27</b>
3.1	Dimensão fractal em função do tamanho	27
3.2	Expansão a partir de um quadrado	28
3.3	Expansão de um polígono qualquer	33
3.4	Condição de existência da curva de expansão	33
3.5	Aplicação à Ecologia de Paisagem	39
<b>4</b>	<b>EXPANSÃO POR TRAPÉZIO</b>	<b>40</b>
4.1	Expansão a partir de um quadrado	40
4.2	Expansão de um polígono qualquer	42
4.3	Expansão por triângulo $\times$ expansão por trapézio	43
<b>5</b>	<b>INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE DA DIMENSÃO FRACTAL</b>	<b>45</b>
5.1	Constante de proporcionalidade de um polígono regular	45
5.2	Constante de proporcionalidade de um polígono qualquer	47

5.3	O papel da constante na análise de elementos da natureza . . . . .	49
5.3.1	Aplicação . . . . .	50
6	<b>APLICATIVO</b> . . . . .	54
6.1	<b>Funções Auxiliares</b> . . . . .	54
6.2	<b>Funções para a expansão por triângulo</b> . . . . .	57
6.3	<b>Funções para expansão por trapézio</b> . . . . .	61
6.4	<b>Funcionalidades</b> . . . . .	66
6.4.1	Análise de fragmentos florestais da Bacia do Rio Catu . . . . .	71
7	<b>TRABALHOS</b> . . . . .	74
8	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	75
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	76

# Introdução

Por ter sido criada para descrever padrões muito irregulares para serem adequadamente descritos pela geometria euclidiana (FALCONER, 2014), a geometria fractal tornou-se uma área de grande interesse para pesquisadores interessados em descrever fenômenos da natureza (BARNESLEY et al., 1988), especialmente na esperança de resolver problemas de escala (TURNER; GARDNER, 2015).

A dimensão de um fractal é uma de suas características mais básicas (ROSENBERG, 2020), podendo ser calculada de diversas formas, e nos fornece diversas informações sobre o objeto estudado. É necessário destacar que existem figuras que, apesar de possuírem a mesma dimensão perímetro-área, possuem formatos completamente distintos (ALLAIN; CLOITRE, 1991).

Na ecologia da paisagem uma das principais aplicações da geometria fractal é o uso das dimensões perímetro-área como uma medida de complexidade do formato do fragmento e da ação antrópica (LOPEZ; FROHN, 2017), no estudo dos padrões de paisagem (TURNER; GARDNER, 2015) e no design de paisagens urbanas e rurais sustentáveis (YU et al., 2019).

Atualmente, um dos principais problemas enfrentados pelas florestas tropicais são a fragmentação e o efeito de borda, causados pela diminuição da área dos fragmentos (BROADBENT et al., 2008; MURCIA, 1995). Por esta razão levantou-se o questionamento de como a dimensão fractal poderia ser utilizada no projeto de recuperação ecológica de paisagens fragmentadas de modo a minimizar o efeito de borda.

Essa dissertação foi desenvolvida com o objetivo de definir um método, denominado expansão de fragmentos, para a recuperação de fragmentos florestais através da obtenção de fragmentos de paisagem com a dimensão fractal desejada, investigando-se a hipótese de que a dimensão perímetro-área poderia ser utilizada no desenvolvimento do método devido a sua fácil estimativa, seu já difundido uso como uma métrica de paisagem.

Pra isso foi necessário estudar aplicações da Geometria Fractal na ecologia de paisagens, analisar o significado da dimensão perímetro-área e o papel da constante de proporcionalidade na equação da dimensão perímetro-área e desenvolver-se um método para a obtenção de um polígono com a dimensão perímetro-área desejada a partir de outro polígono com dimensão qualquer.

Além disso, para que esse método pudesse ser aplicado em fragmentos de paisagem em ambientes SIG (sistema de informação geográfica), desenvolveu-se em linguagem Python um aplicativo para a análise da imagem e definição dos pontos de expansão.

No Capítulo 1 desse trabalho buscou-se fazer uma revisão de literatura da geometria fractal assim como suas aplicações na ecologia de paisagem focando no uso da dimensão perímetro-área. O Capítulo 2 traz uma descrição da metodologia utilizada nesta dissertação.

O método para a obtenção de um polígono com a dimensão perímetro-área desejada a partir de outro polígono com dimensão através da adição de um triângulo é desenvolvido no Capítulo 3. O método é inicialmente desenvolvido em um quadrado e, em seguida, generalizado para um polígono qualquer, além disso uma condição para a possibilidade de expansão é definida.

O método de expansão apresentado no Capítulo 3 é então ampliado no Capítulo 4 trocando-se a adição de um triângulo pela adição de um trapézio isósceles. Os dois métodos são comparados e as vantagens e dificuldades do novo método são discutidas.

A análise da constante de proporcionalidade de equação da dimensão perímetro-área é feita no Capítulo 5 que também traz um método para a definição da constante de um polígono qualquer. Possibilidades de aplicação desse conceito são apresentadas no capítulo que também conta com uma aplicação na análise de sementes de *Zeyheria tuberculosa* (Vell.) Bureau ex Verl.

O Capítulo 6 apresenta uma descrição do aplicativo desenvolvido e mostra as funções criadas para a expansão de fragmentos. O capítulo também mostra o uso do aplicativo na análise de imagens de fragmentos de paisagem florestal da Bacia do Rio Catu que cobre as cidades Alagoinhas, Aramari, Catu e Pojuca, na Bahia (VAZ; MATOS, 2014).

Trabalhos decorrentes dessa pesquisa e propostas para pesquisas futuras são apresentados no Capítulo 7. E, por fim, o Capítulo 8 traz uma conclusão da pesquisa desenvolvida.

# 1 Estado da Arte

## 1.1 Geometria Fractal

O termo fractal foi criado pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot, que o definiu como todo conjunto cuja dimensão de Hausdroff-Besicovitch (denotada aqui por  $D_H$ ) fosse estritamente maior do que a dimensão topológica afirmando que todo conjunto no qual  $D_H$  assumisse valores não-inteiros era um fractal (MANDELBROT, 1982).

Entretanto, Falconer aponta que essa definição “provou ser insatisfatória, pelo fato de excluir uma série de conjuntos que claramente deveriam ser considerados fractais” (FALCONER, 2014, p. xxvii, tradução nossa). Com o objetivo de remediar a situação, o autor propôs não uma definição exata, mas um conjunto de características comuns a maioria das fractais, embora nem todos os fractais apresentam todas essas características.

Assim podemos pensar num fractal como um conjunto que geralmente apresenta estrutura fina, ou seja, detalhamento em escalas minúsculas; é muito irregular para ser descrito pela linguagem geométrica ou analítica tradicional; é definido de forma simples, geralmente recursiva; apresenta alguma forma de auto-similaridade e possui dimensão fractal maior do que a topológica (FALCONER, 2014).

### 1.1.1 Auto-similaridade e Auto-afinidade

Mandelbrot (1982) apontou que a maioria dos fractais descritos em seu trabalho eram invariantes sob algumas transformações de escala e denominou como auto-similares os fractais invariantes sob semelhanças geométricas ordinárias. Os objetos auto-similares e auto-afins são ambos compostos de infinitas cópias de si mesmo, ou seja, são formados pelo mesmo padrão que se repete em diferentes escalas de comprimento, contudo enquanto em objetos auto-similares essa característica é vista em qualquer direção, em objetos auto-afins esta característica não acontece em todas as direções (ROSENBERG, 2020; SEURONT, 2010)

### 1.1.2 Dimensão Fractal

Um dos pontos centrais da geometria fractal é o conceito de dimensão uma vez que ao analisarmos a dimensão de um conjunto podemos obter informações acerca de sua complexidade e irregularidade, de suas propriedades geométricas e volume que ele ocupa (FALCONER, 2014).

Fraser (2020) destaca a importância da interação entre a dimensão de conjuntos e medidas na teoria dimensional. O autor considera que

“Uma abordagem natural para a teoria da dimensão é quantificar o quão grande é um conjunto em uma determinada escala, considerando coberturas ideais por bolas cujo diâmetro está relacionado à escala. [...] Compreender como encontrar coberturas de um conjunto em pequenas escalas fundamenta uma grande parte da teoria da dimensão” (FRASER, 2020, p. 5, tradução nossa)

Atualmente existem diversas formas de calcular a dimensão. Cada um desses métodos leva a diferentes valores e descreve diferentes aspectos. Com a “esperança de que sistemas complexos possam ser explicados usando um número relativamente baixo de parâmetros” (SEURONT, 2010, p. 1, tradução nossa) estudiosos procuram entender as relações entre as diferentes dimensões e descobrir de que forma os diferentes ambiente e famílias de exemplos afetam seu comportamento (FALCONER, 2014).

### 1.1.2.1 Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff é a mais antiga e importante das dimensões fractais e, embora possa ser definida para qualquer conjunto, sua estimativa computacional é por vezes muito difícil (FALCONER, 2014). É determinada através da medida  $s$ -dimensional de Hausdorff,  $\mathcal{H}^s(F)$ . Para quase todo  $s \geq 0$ ,  $\mathcal{H}^s(F)$  é igual a  $\infty$  ou 0. Entretanto, existe um valor crítico de  $s$  em que  $\mathcal{H}^s(F)$  vai de  $\infty$  a 0. Esse valor de  $s$  é chamado de dimensão de Hausdorff de  $F$ ,  $D_{\mathcal{H}}(F)$ .

### 1.1.2.2 Dimensão Box-counting

Sendo a mais utilizada das dimensões fractais, Falconer comenta que a dimensão box-counting “tem uma formulação intuitiva simples e é uma das dimensões mais amplamente utilizadas. [...] e sua popularidade se deve em grande parte à relativa facilidade de cálculo matemático e estimativa empírica.” (FALCONER, 2014, p. 27, tradução nossa). Dado um conjunto  $F \subset \mathbb{R}^2$  autor define a dimensão box-counting,  $D_{\mathcal{B}}$ , de  $F$  pela relação entre o logaritmo do número de  $\delta$ -coberturas do conjunto pelo tamanho da cobertura, para coberturas de tamanho ínfimo.

### 1.1.3 Lacunaridade

Embora as dimensões forneçam informações valiosas acerca da geometria dos objetos, o fato de objetos de formas completamente diferentes compartilharem a mesma dimensão fractal torna necessária a existência de outros métodos de análise dos objetos fractais (BARNESLEY et al., 1988).

Assim como diversos conceitos relacionados à geometria fractal, a lacunaridade não possui uma definição formal (HALLEY et al., 2004), contudo pode ser pensada como “uma forma de caracterizar a configuração espacial de pontos ou outros componentes de um padrão espacial, tais como fragmentos ou pixels.” (NEWMAN et al., 2019, p. 10, tradução nossa) ou como uma medida da uniformidade de um conjunto (ROSENBERG, 2020).

Barnsley et al. (1988) informam que o conceito de lacunaridade foi criado por Mandelbrot como “o passo inicial para a quantificação da textura” (BARNESLEY et al., 1988, p. 67-68, tradução nossa). Mandelbrot (1982) afirma que, embora a noção de textura seja elusiva, a geometria fractal pode ser pensada como uma ferramenta para o seu estudo implícito, destingindo a lacunaridade como um de seus aspectos.

Seguindo ainda o exemplo da dimensão fractal, os métodos para o cálculo da lacunaridade variam tanto quanto sua definição. Entretanto o algoritmo gliding-box (caixa deslizante) de Allain e Cloitre (1991) tornou-se o mais utilizado (HALLEY et al., 2004).

## 1.2 Geometria Fractal aplicada à Ecologia de Paisagem

Sugihara e May afirmam que “modelos fractais descrevem a geometria de uma grande variedade de objetos da natureza” (SUGIHARA; MAY, 1990, p. 79, tradução nossa). Os autores comentam que estudos da forma e medida de objetos do mundo real costumavam ser realizados através de simplificações em elementos da geometria euclidiana, mas que posteriormente reconheceu-se que a irregularidade presente em tais objetos os colocavam sob a área de estudo da geometria fractal.

Embora os padrões da natureza não sejam fractais ideais, eles são ainda menos parecidos com os objetos da geometria euclidiana (HALLEY et al., 2004) e são semelhantes o suficiente para que seja possível usar aproximações para tratá-los como fractais (FALCONER, 2014).

Milne (1988) alega que as paisagens são melhor descritas como fractais dada a natureza não-euclidiana de sua densidade e relação perímetro-área. Metzger define paisagem como um “mosaico heterogêneo formado por unidades interativas, sendo esta heterogeneidade existente para pelo menos um fator, segundo um observador e numa determinada escala de observação” (METZGER, 2001, p. 4). Dessa forma, “a ecologia de paisagem enfatiza a interação entre padrão espacial e processo ecológico” (TURNER; GARDNER, 2015, p. 2, tradução nossa).

### 1.2.1 Escalas

Wu destaca que uma vez que a heterogeneidade espacial se mostra presente em todas as escalas é necessário não apenas que se possa quantificá-la, mas mensurar sua



variação em diferentes escalas, tornando viável “compreender como as paisagens afetam e são afetadas por atividades biofísicas e socioeconômicas” (WU, 2004, p. 125, tradução nossa). Turner destaca a influência da escala nos resultados dos estudos pois “processos e parâmetros importantes em uma escala podem não ser tão importantes ou previsíveis em outra escala” (TURNER, 1989, p. 174, tradução nossa).

Os estudos a respeito dos efeitos de escala realizados pela ecologia, o sensoriamento remoto e a geografia com o uso de métricas de paisagem são empregados para “lançaram uma nova luz sobre os problemas de efeitos de escala na análise de padrões, assim como a natureza multiescalar da heterogeneidade espacial” (WU, 2004, p. 126, tradução nossa).

Para Montello (2015), a escala, cujo conceito pode ser confusa, é um dos problemas fundamentais de qualquer ciência que estude fenômenos distribuídos pela superfície terrestre. O autor diferencia os conceitos de escala de análise e escala de fenômeno como o “tamanho da unidade na qual algum fenômeno é medido e o tamanho das unidades nas quais medidas são agregadas para análise de dados e mapeamento” (MONTELLO, 2015, p. 1, tradução nossa) e “tamanho em que estruturas existem e sobre as quais os processos geográficos operam no mundo” (MONTELLO, 2015, p. 2, tradução nossa) respectivamente.

Gustafson (2019) destaca que, apesar das diversas tentativas de resolução, os problemas de medição em diferentes escalas continuam sendo um dos maiores problemas enfrentados pelos ecologistas de paisagem. Halley et al. apontam que mesmo com os diversos problemas de um estabelecimento de uma escala ideal, não é possível desconsiderar o efeito das escalas uma vez que “diversos valores de interesse para ecologistas, [...] não podem ser definidos sem a referência de uma escala específica ou um intervalo de escalas” (HALLEY et al., 2004, p. 264, tradução nossa).

Lopez e Frohn (2017) definem a dimensão fractal (em conjunto com dominância e contágio) como uma das três métricas fundamentais para o estudo do padrão da paisagem. É possível pensar num fractal como um conjunto cuja aparência permanece a mesma em diferentes escalas (ROSENBERG, 2020). Embora padrões da natureza mantenham a auto-similaridade apenas em um número finito de escalas, para Mandelbrot (1982) o fato de os fractais servirem como aproximações razoáveis dos padrões da natureza já é motivo de admiração.

Halley et al. (2004) considera os fractais como o primeiro passo para lidar com os problemas de escala, mas alerta que antes que se possa anunciar uma característica fractal, é necessária a definição de uma relação de lei de potência entre escala e ocupação que deve ser mantida através de um intervalo de escalas significativo.

### 1.2.2 Leis de Potência

A ideia de medição em diferentes escalas é inerente a grande parte das definições da geometria fractal, nas quais diversas leis de potência relacionam medida e escala e os expoentes dessas leis definem diferentes dimensões fractais as quais determinam a ligação entre o espaço ocupado por um objeto e seu tamanho (ROSENBERG, 2020; SEURONT, 2010).

Halley et al. (2004) afirma que leis de potência já vinham sendo aplicadas na ecologia antes mesmo da geometria fractal e que sua íntima relação com os fractais aumentou o interesse em estudos relacionados à geometria fractal. Os expoentes das leis de potência geralmente são diferentes da unidade em casos biológicos resultando em gráficos no formato de curvas quando aplicadas à eixos lineares. Contudo, é possível linearizar esses gráficos pelo uso de eixos logarítmicos (SEURONT, 2010).

## 1.3 Métricas Fractais de Paisagem

Métricas fractais são usadas no estudo de paisagem para quantificar a complexidade do formato dos fragmentos, estimar o grau de ação antrópica (LOPEZ; FROHN, 2017), relacionar os padrões dos fragmentos aos “potenciais processos associados à complexidade e determinar a natureza da fragmentação da paisagem” (YU et al., 2019, p. 186, tradução nossa).

Existem muitos métodos para o cálculo da dimensão fractal, sendo vários aplicáveis à ecologia de paisagem. Milne (1988) discorre sobre a complexidade das paisagens e a necessidade do desenvolvimento de métodos para a quantificação das relações entre as diferentes características da paisagem e da identificação de escalas de comprimento adequadas aos estudos dos padrões de paisagem. Ainda apresentou em seu trabalho diferentes métodos para o cálculo da dimensão fractal na análise de paisagens.

### 1.3.1 Dimensão Perímetro-Área

O mais utilizado dentre esses métodos é a dimensão perímetro-área, originalmente aplicada por Lovejoy (1982) ao cálculo da dimensão fractal de nuvens, mas introduzido na ecologia de paisagens por Krummel et al. (1987).

É necessário salientar que, embora bastante aplicados na ecologia de paisagem, as dimensões perímetro-área não são dimensões verdadeiras no sentido matemático (LOPEZ; FROHN, 2017), uma vez que não estão relacionados ao conceito de medida destacados por Fraser (2020).

O método perímetro-área recebeu diversas variações ao longo do tempo, mas é usado principalmente em aplicações GIS (sistema de informação gráfica) (HALLEY et al.,

2004; YU et al., 2019). Na ecologia de paisagem é usado como uma medida da complexidade das bordas dos fragmentos florestais em relação à área que ocupam (SEURONT, 2010).

Sejam  $P$ ,  $A$  e  $D_F$  respectivamente o perímetro, a área e a dimensão fractal de fragmento florestal. Então os três se relacionam de forma que (KRUMMEL et al., 1987):

$$P \propto \sqrt{A^{D_F}} \quad (1.1)$$

onde  $\propto$  indica proporcionalidade. Assim, existe uma constante de proporcionalidade  $k$  que torna verdadeiro:

$$P = kA^{\frac{D_F}{2}} \quad (1.2)$$

Aplicando logaritmos a ambos os lados da equação e desenvolvendo obtemos:

$$D_F = 2 \frac{\ln\left(\frac{P}{k}\right)}{\ln A} \quad (1.3)$$

Os dados das medidas das áreas e perímetros dos fragmentos são marcados em um diagrama de dispersão log – log, a regressão linear é então aplicada. Uma vez que a Equação (1.2) possui duas incógnitas, e a dimensão fractal, que é uma medida adimensional, é então calculada através da inclinação da reta de regressão.

Para testar a teoria de que fragmentos pequenos e grandes possuem dimensões diferentes, Krummel et al. (1987) aplicam a regressão linear separadamente aos dados de fragmentos pequenos e grandes. O resultado encontrado foi que os fragmentos menores possuíam menor dimensão fractal em comparação com os fragmentos maiores.

Convencionou-se que  $D_F$  varia entre 1 e 2 de acordo com a complexidade dos fragmentos (KENKEL; WALKER, 1996; TURNER; RUSCHER, 1988; VRANKEN et al., 2015). Enquanto formas simples como círculos possuem  $D_F = 1$ , em formas mais complexas, cujo perímetro tende a preencher o plano,  $D_F \rightarrow 2$  (KRUMMEL et al., 1987; TURNER, 1990). Diversos estudos conseguiram relacionar a dimensão fractal de fragmentos com a ação antrópica: áreas florestais apresentam dimensões fractais mais altas devido a seu formato complexo, enquanto áreas agrícolas apresentam dimensões mais baixas devido ao seu formato mais simples (LOPEZ; FROHN, 2017).

Embora a dimensão perímetro-área seja mais popular entre os ecologistas de paisagem (GUSTAFSON, 2019), diversos problemas têm sido apresentados em relação à sua aplicação, especialmente em relação ao uso da regressão linear (HALLEY et al., 2004; LOPEZ; FROHN, 2017; OLSEN; RAMSEY; WINN, 1993) cuja estimativa é prejudicada conforme o número de fragmentos que compõem a paisagem diminui.

#### 1.3.1.1 Constante $k$ para malhas quadradas

Com o objetivo de aprimorar a dimensão perímetro-área tornando possível sua aplicação em paisagens compostas até mesmo por um único fragmento, Olsen, Ramsey e

Winn (1993) desenvolveram em seu trabalho um método que eliminava a necessidade da aplicação da regressão linear, ao definir a constante de proporcionalidade  $k$ .

A partir da Equação (1.2) e levando em conta o formato quadrado das malhas, os autores utilizaram a razão perímetro-área do quadrado, no qual

$$P = 4A^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

para definirem a constante como  $k = 4$ . Assim a dimensão de um único fragmento foi definida como:

$$D_F = 2 \frac{\ln\left(\frac{P}{4}\right)}{\ln(A)} \quad (1.5)$$

Tripathi et al. afirma que “quando  $k = 4$ ,  $D_F$  pode ser pensada como o quanto o perímetro de um objeto diverge do perímetro de um quadrado perfeito de mesma área” (TRIPATHI et al., 2015, p. 1421, tradução nossa).

Essa mesma ideia pode ser expandida uma vez que Ricotta et al. (1997) e Chen (2020) ampliaram o estudo calculando a constante para figuras geométricas diferentes do quadrado. Os autores divergem uma vez que, enquanto Ricotta et al. (1997) traz essa diferenciação devido à variação no formato das malhas de SIG, Chen (2020) defende que a constante deve ser variada conforme o formato e número de direções de crescimento do sistema estudado, confirmando a ideia da dimensão fractal como uma métrica da ação humana (O’NEILL et al., 1988).

### 1.3.1.2 Constante $k$ para diferentes formatos de malha

Ricotta et al. (1997) e Chen (2020) generalizam o método de Olsen, Ramsey e Winn (1993), calculando a constante de proporcionalidade com base em outros polígonos regulares, o retângulo, o círculo e até mesmo o floco de neve de Koch.

Uma vez que a área e o perímetro de um polígono regular de  $n$  lados de comprimento  $l$  são respectivamente calculados através das equações

$$A = \frac{nl^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (1.6)$$

$$P = nl \quad (1.7)$$

igualando as Equações (1.6) e (1.7) obtemos então

$$\begin{aligned} \frac{P}{n} &= \sqrt{\frac{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) A}{n}} \\ P &= 2 \sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) A^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

o que se encaixa no formado da Equação (1.2). Consequentemente, a constante de proporcionalidade perímetro-área,  $k$ , de um polígono regular de  $n$  lados é dada por

$$k = 2\sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (1.9)$$

Portanto, podemos reescrever a Equação (1.3) na forma

$$D_F = 2 \frac{\ln\left(\frac{P}{2\sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)}{\ln A} \quad (1.10)$$

Ricotta et al. (1997) define a constante como  $k = 2\sqrt{r}\left(1 + \frac{1}{r}\right)$  para um retângulo cuja razão entre o lado maior e o lado menor é  $r$ , enquanto Chen (2020) define a constante do círculo como  $k = 2\sqrt{\pi}$  e do floco de neve de Koch como  $k = \frac{12}{\sqrt{6 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}}$ .

Tabela 1 – Valores aproximados da constante de proporcionalidade,  $k$ , para alguns polígonos regulares calculados através da Equação (1.9).

Nº de lados	Constante
3	4,55901
4	4
5	3,81194
6	3,72242
7	3,67207

## 2 Metodologia

### 2.1 Métodos

Este trabalho propõe-se a desenvolver um método de planejamento para a recuperação de fragmentos florestais, denominado expansão de fragmentos, de forma a minimizar os efeitos de borda. Uma vez que a recuperação de fragmentos florestais consiste na delimitação de uma área para plantio de vegetação nativa ou proteção dessa vegetação para que essa se amplie de forma natural, a expansão de fragmentos é então um método para delinear os locais para a área de recuperação.

A expansão de fragmentos é então apresentada de forma teórica nos Capítulos 3 e 4, com o desenvolvimento das equações de expansão, enquanto o Capítulo 6 traz a aplicação do método em imagens de paisagem reais.

Baseado na dimensão perímetro-área, o método de expansão utiliza os dados de área, perímetro e comprimento dos lados dos fragmentos de paisagem para definir possíveis áreas de recuperação em formato de triângulo (Capítulo 3) ou trapézio isósceles (Capítulo 4). Procuramos também definir um método para verificar se um fragmento admitia a expansão e em quais lados essa expansão poderia ser feita. Para que esse estudo pudesse ser feito em ambientes SIG (sistema de informação geográfica), foi desenvolvido um aplicativo (Capítulo 6) para análise dos fragmentos e definição, quando possível, das potenciais áreas de recuperação. A escala de análise escolhida foi do ponto de vista de uma bacia hidrográfica.

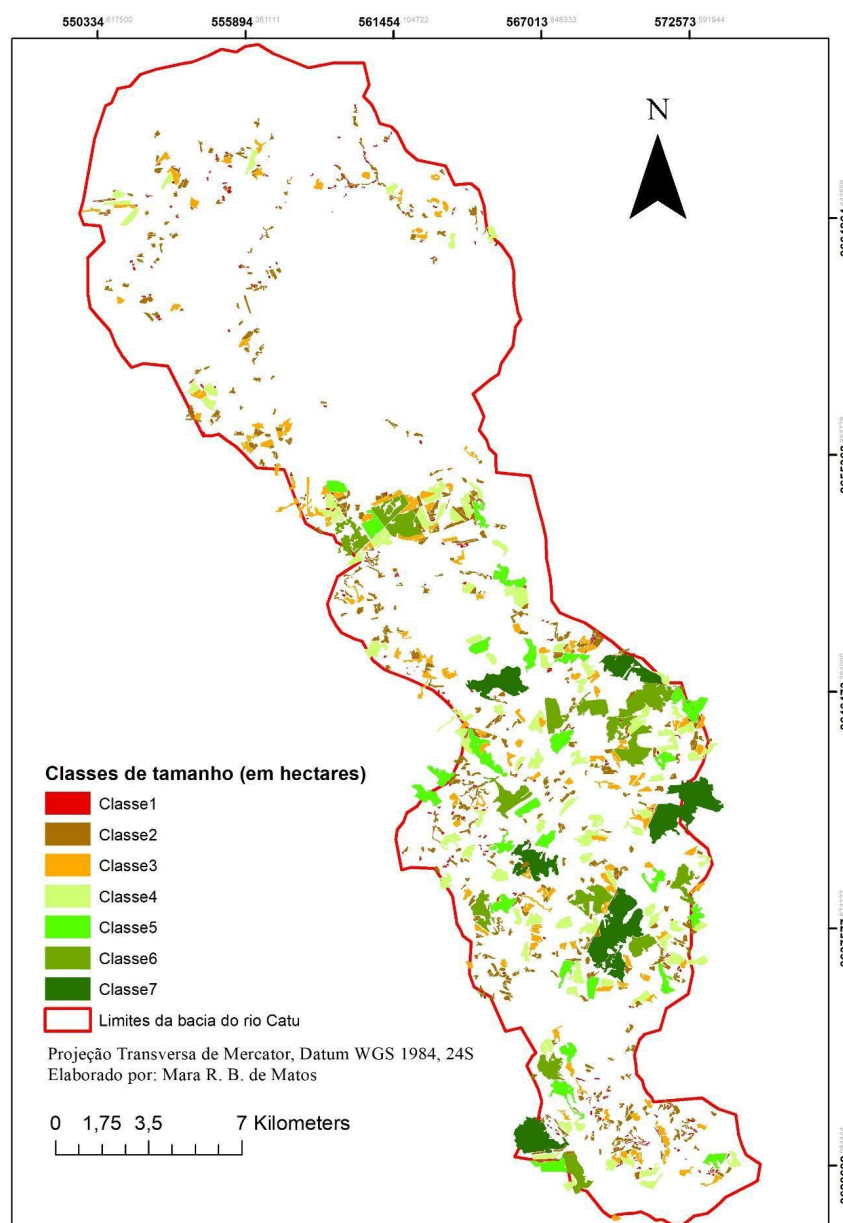
Adicionalmente, o Capítulo 5 desenvolve um método para a análise do formato de objetos da natureza baseado no estudo da constante de proporcionalidade da dimensão perímetro-área, além de uma proposta para expansão com a constante modificada e uma aplicação do método da análise de sementes.

### 2.2 Materiais

O aplicativo FracFor, assim como os as imagens de polígonos e gráficos exibidos foram desenvolvidos em linguagem Python, versões 3.9 e 3.10, com o auxílio do Visual Studio Code.

Os fragmentos de paisagem utilizados para análise no aplicativo FracFor foram escolhidas de uma imagem de fragmentos florestais, delineados através de vetorização a partir de uma imagem de Landsat, da Bacia do Rio Catu na Bahia (Figura 1) fornecida pela Prof. Dr. Mara Rojane Barros de Matos.

Figura 1 – Mapa de fragmentos florestais da Bacia do Rio Catu.



Fonte: Mara Rojane Barros de Matos

Enquanto na análise das sementes foram utilizadas fotos de 33 amostras de sementes de *Zeyheria tuberculosa* (Vell.) Bureau ex Verl. As amostras foram fornecidas pelo herbário do Campus II da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), com o auxílio da Prof. Dr. Gracineide Selma Santos de Almeida. As fotos foram tiradas de uma câmera de celular de 48 Mpx, com o auxílio de um suporte para celular para garantia da equabilidade das distância das imagens.

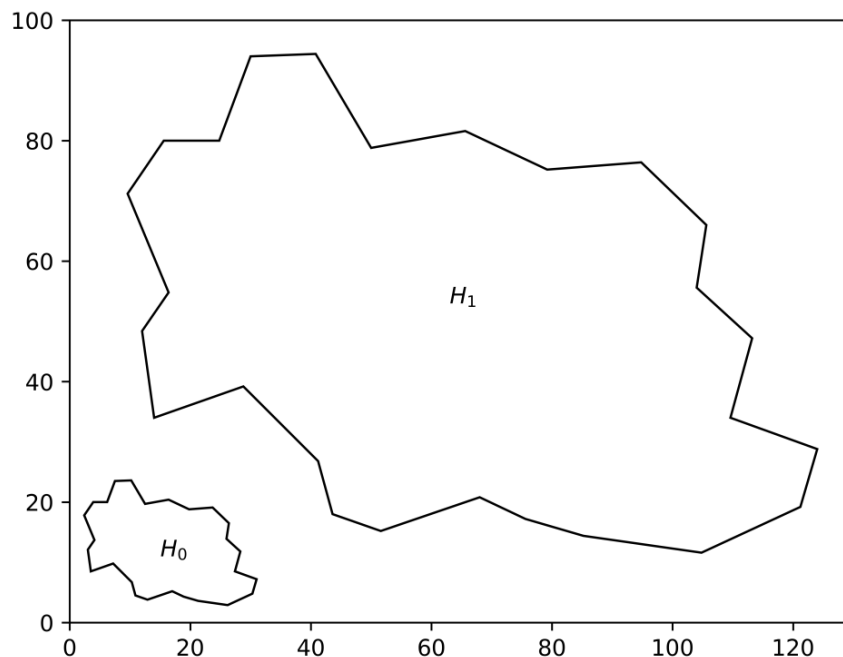
### 3 Expansão por Triângulo

Uma vez que, quando observados como imagens de sensoriamento remoto, os fragmentos de paisagem são na verdade polígonos com uma quantidade muito grande de lados, o método de expansão foi inicialmente desenvolvido em polígonos. A expansão de polígonos objetiva planejar a recuperação de fragmentos florestais, para que estes possam ter a dimensão polígono-área desejada.

#### 3.1 Dimensão fractal em função do tamanho

Krummel et al. (1987) teorizou que a dimensão fractal conforme a Equação (1.3) varia de acordo com o tamanho do fragmento. Uma vez que o cálculo da dimensão fractal de um único fragmento pode ser feito através da Equação (1.5), é possível testar esta hipótese. Para isso construímos um polígono irregular,  $H_0$ , e utilizamos a homotetia, uma transformação geométrica que preserva forma e ângulos, mas altera distâncias, para obter de  $H_0$  um polígono  $H_1$ , similar a  $H_1$  (Figura 2).

Figura 2 – Uma homotetia de razão 4 foi aplicada no polígono  $H_0$  para a obtenção do polígono  $H_1$ .



Analisando a Tabela 2, podemos observar que  $H_1$  tem dimensão fractal menor do que  $H_0$ . Contudo, devido a irregularidade de  $H_0$  é interessante analisar qual seria o comportamento, com a variação do comprimento do lado, da dimensão fractal em



polígonos regulares. Note que a dimensão é uma grandeza adimensional, enquanto a área e o perímetro estão em unidade de medida geral.

Tabela 2 – Dados de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ), calculada através da Equação (1.5), dos Polígonos A e B da Figura 2.

	$A$ (u.m.)	$P$ (u.m.)	$D_F$
Polígono $H_0$	87,92204	363,715	1,04816
Polígono $H_1$	351,68816	5819,44	1,03275

Uma vez que num polígono regular o perímetro e a área respectivamente são dados pelas Equações (1.6) e (1.7) então a função da dimensão fractal pelo lado é

$$D(l) = 2 \frac{\ln\left(\frac{nl}{4}\right)}{\ln\left(\frac{nl^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)} \quad (3.1)$$

onde  $P$ ,  $A$ ,  $l$  e  $n$  são respectivamente o perímetro, a área, o comprimento do lado e o número de lados do polígono e  $D(l)$  é a função da dimensão fractal do polígono em função do comprimento do lado.

Observe que nos gráficos das Figuras 3a e 3b, quando  $l \rightarrow \sqrt{\frac{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}}$ , ou seja, quando a área do polígono tende a 1,  $D(l)$  tem como limites laterais  $\infty$  e  $-\infty$  e quando  $l \rightarrow \infty$ ,  $D(l) \rightarrow 1$ . Enquanto no gráfico da Figura 3c, ou seja, do quadrado,  $D(l)$  é constante igual a 1. Isto suporta a ideia de Tripathi et al. (2015) de que a dimensão fractal conforme a Equação (1.5) pode ser pensada como uma medida da variação das relações perímetro-área de um fragmento em comparação ao quadrado.

Entretanto, figuras bastante distintas de um polígono regular podem ter dimensão fractal igual a 1, conforme a Equação (1.5), como observado na Figura 4. Assim, existem polígonos irregulares com a mesma relação perímetro-área de um quadrado.

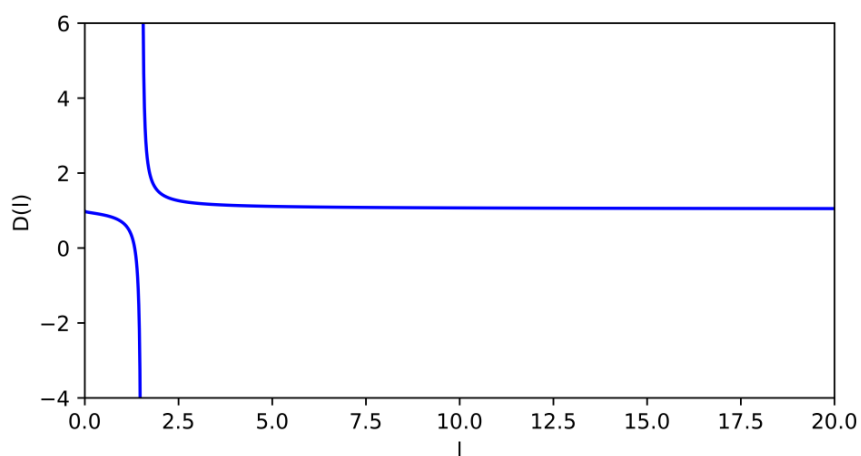
Com o objetivo de obter polígonos com dimensão fractal igual a 1 segundo a Equação (1.5), desenvolvemos um método para, a partir de um polígono qualquer,  $F$ , obtermos, quando possível, um polígono  $F'$ , com dimensão fractal igual a 1.

## 3.2 Expansão a partir de um quadrado

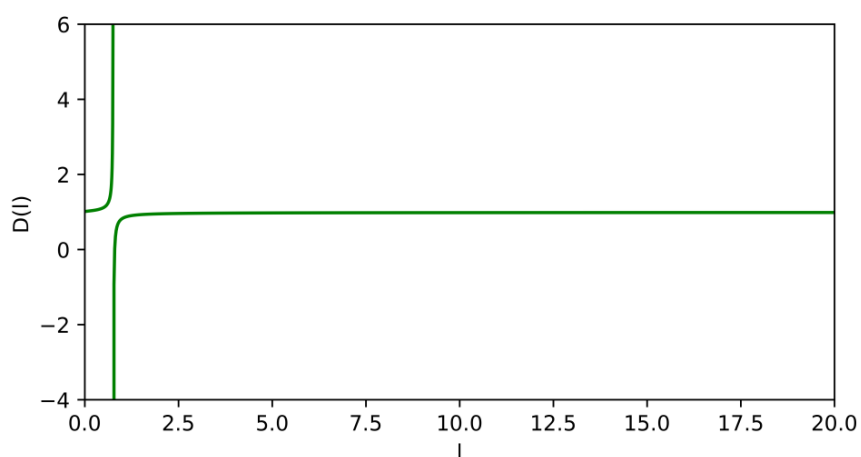
Inicialmente iremos definir a formação de um pentágono com dimensão fractal igual a 1 a partir de um quadrado. Ou seja, dado um quadrado de vértices consecutivos  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$ , a partir da eliminação do lado  $RS$ , será determinado o lugar geométrico de pontos  $V$  tais que o pentágono de vértices  $R$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $T$  e  $U$  satisfaça a igualdade

$$P_{RVSTU} = 4\sqrt{A_{RVSTU}}$$

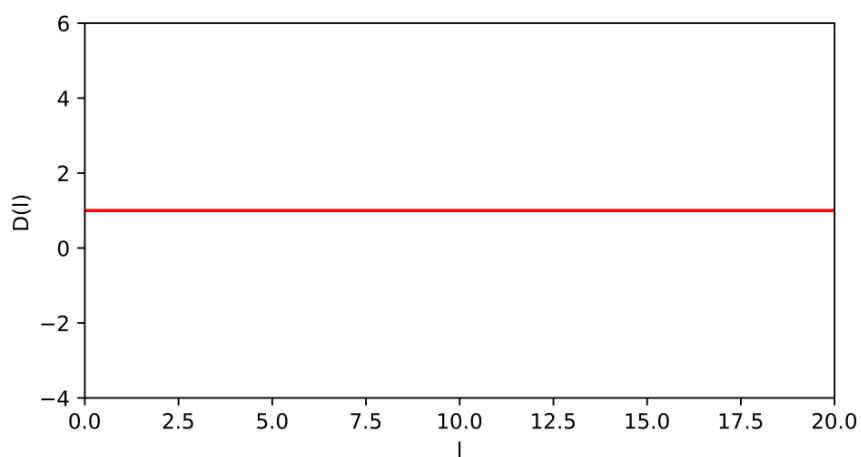
Figura 3 – Gráfico da dimensão fractal,  $D(l)$ , de diferentes polígonos regulares em função do comprimento de seu lado,  $l$ .



(a) Triângulo Equilátero

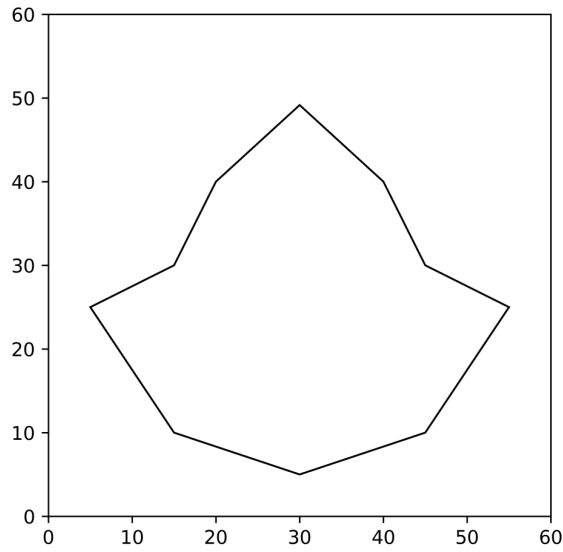


(b) Pentágono Regular

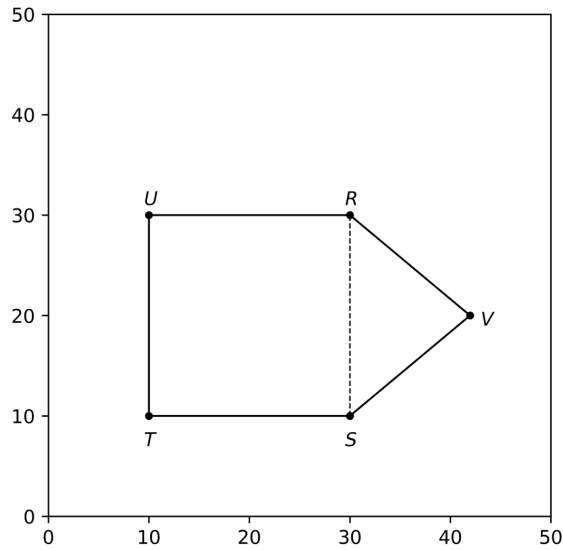


(c) Quadrado

Figura 4 – Decágono irregular com dimensão fractal igual a 1.



onde  $P_{RVSTU}$  e  $A_{RVSTU}$  são respectivamente o perímetro e a área do pentágono  $RVSTU$ .

Figura 5 – Pentágono irregular  $RVSTU$  com dimensão fractal igual a 1 criado a partir da expansão do quadrado  $RSTU$ .

Sejam  $l$ ,  $c_1$  e  $c_2$  os comprimentos dos lados  $RS$ ,  $RV$  e  $VS$  respectivamente, então  $P_{RVSTU} = 2l + c_1 + c_2$ . Sendo  $R = (x_R, y_R)$ ,  $S = (x_S, y_S)$  e  $V = (x, y)$ , temos que:

$$P_{RVSTU} = 3l + \sqrt{(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2} + \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2} \quad (3.2)$$

Por outro lado,  $A_{RVSTU}$  é a soma das áreas do quadrado  $RSTU$  e do triângulo de vértices

$R$ ,  $V$  e  $S$ . Ou seja,  $A_{RVSTU} = A_{RSTU} + A_{RV S}$ . Sabemos, da geometria analítica, que

$$A_{RV S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_R & y_R & 1 \\ x_S & y_S & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \frac{(x_R y_S + x_S y + y_R x) - (x_R y + y_R x_S + y_S x)}{2}$$

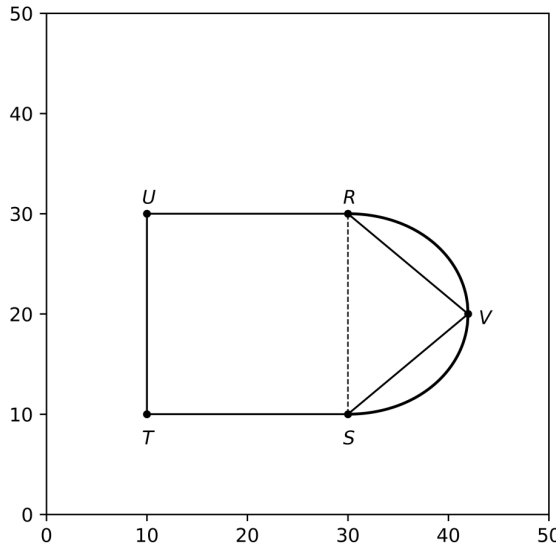
Portanto,

$$A_{RVSTU} = l^2 + \frac{x_R y_S + x_S y + y_R x - x_R y - y_R x_S - y_S x}{2} \quad (3.3)$$

A partir das Equações (3.2) e (3.3), os pontos  $V = (x, y)$  do plano, que definem o pentágono  $RVSTU$ , cuja dimensão fractal é igual a 1, satisfazem:

$$3l + \sqrt{(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2} + \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2} = 4\sqrt{l^2 + \frac{x_R y_S + x_S y + y_R x - x_R y - y_R x_S - y_S x}{2}} \quad (3.4)$$

Figura 6 – Lugar geométrico de pontos  $V$  que satisfazem a Equação (3.4) para o lado  $RS$  do quadrado  $RSTU$ .



É importante destacar que a expansão independe da posição do quadrado em relação aos eixos coordenados (Figura 7), uma vez que a equação de expansão depende apenas da área e perímetro do polígono e do comprimento do lado de expansão. Contudo, para simplificar os cálculos normalmente consideraremos que o lado de expansão está sobre o eixo  $oy$ . Uma vez que é sempre possível deslocar um polígono qualquer para essa posição através de rotação e translação, ambas transformações isométricas, e, portanto, não influenciam a dimensão fractal, essa simplificação não afeta a generalidade do método.

Além disso, a curva de expansão não é uma semi-circunferência de raio  $l/2$  centrada no ponto médio do lado de expansão uma vez que, dados os pontos  $R = (0, 0)$ ,  $S = (l, 0)$ ,  $T = (l, -l)$ ,  $U = (0, -l)$ , o ponto  $V = (l/2, l/2)$  não pertence a curva de expansão do

Figura 7 – Lugar geométrico que satisfaz a Equação (3.4) em um quadrado cujos lados não são paralelos aos eixos coordenados.

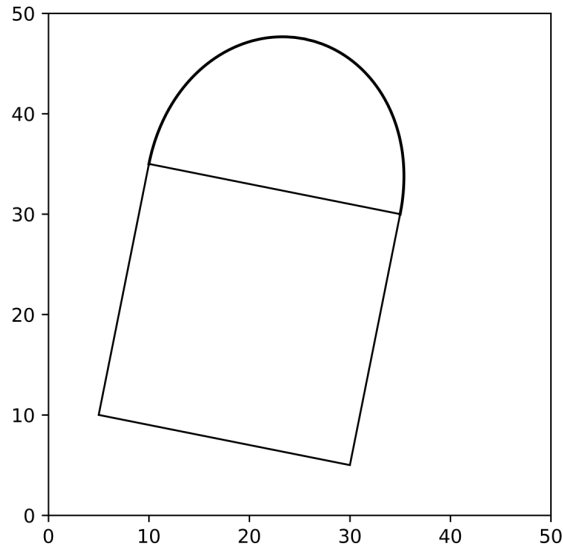
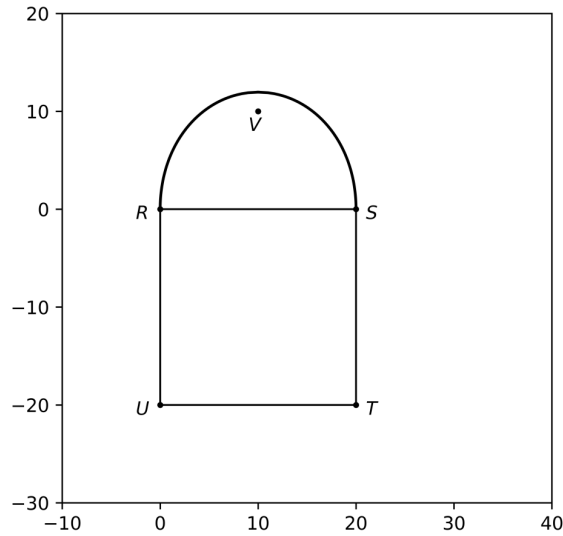


Figura 8 – Dado o quadrado  $RSTU$ , o ponto  $V = (10, 10)$  não pertence à curva de expansão.



lado  $RS$  do quadrado  $RSTU$ , uma vez que o polígono  $RVSTU$  tem perímetro e área respectivamente iguais a  $(3 + \sqrt{2})l$  e  $\frac{5l^2}{4}$ , portanto a dimensão de  $RVSTU$  é

$$D_{RVSTU} = 2 \frac{\ln \left( \frac{(3 + \sqrt{2})l}{4} \right)}{\ln \left( \frac{5l^2}{4} \right)}$$

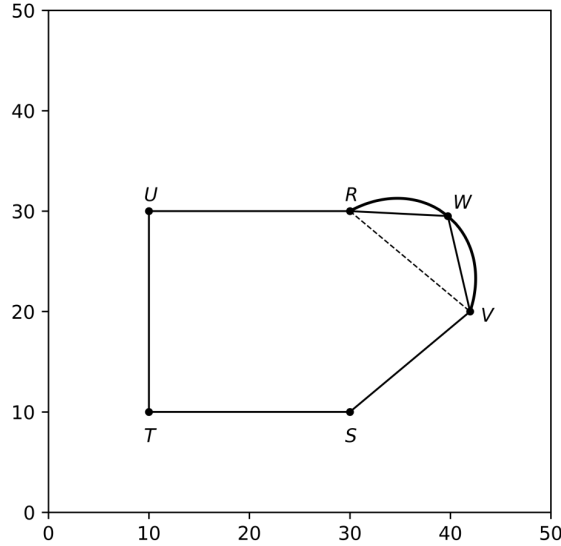
utilizando as propriedades logarítmicas podemos reescrever a equação como

$$D_{RVSTU} = \frac{2 \ln((3 + \sqrt{2})l) - \ln(4)}{2 \ln(\sqrt{5}l) - \ln(4)}$$

uma vez que  $3 + \sqrt{2} > \sqrt{5}$ , isso implica que  $D_{RVSTU} > 1$ .

### 3.3 Expansão de um polígono qualquer

Figura 9 – Expansão do pentágono  $RVSTU$  da Figura 5 no hexágono  $RWVSTU$  com dimensão fractal igual a 1.



Vamos então generalizar o processo de expansão fractal para um polígono qualquer. Dado um polígono  $F$  com  $n$  lados definidos pelos vértices consecutivos  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Sem perda de generalidades, podemos fazer a expansão de  $F$  a partir do lado  $V_1V_n$ . Seja  $V = (x, y)$  o vértice acrescentado ao polígono  $F$ , a partir do lado  $V_1V_n$ . Desta forma obtemos um polígono  $F'$  de  $n + 1$  lados cujos vértices consecutivos são  $V_1, V_2, \dots, V_n, V$ .

O perímetro e a área de  $F'$  são dados respectivamente por

$$P(F') = P(F) - d + d_1 + d_2$$

$$A(F') = A(F) + A(T(x, y))$$

onde  $d = d(V_1, V_n)$ ,  $d_1 = d(V_n, V)$ ,  $d_2 = d(V, V_1)$  e  $T(x, y)$  é o triângulo de vértices  $V_1, V_n$  e  $V$ . Se  $V_1 = (x_1, y_1)$  e  $V_n = (x_n, y_n)$ , a curva de estabilidade fractal é dada pela equação

$$P(F) - d + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} = 4\sqrt{A(F) + \frac{x_1y_n + x_ny + y_1x - x_1y - y_1x_n - y_nx}{2}} \quad (3.5)$$

### 3.4 Condição de existência da curva de expansão

É necessário que analisemos a condição de existência da curva dada pela Equação (3.5). Para simplificar os cálculos consideremos que o lado de expansão está sobre o eixo

oy. Note que isso não é uma restrição do caso, uma vez que ambas, rotação e translação, são transformações isométricas, e, portanto, não influenciam a dimensão fractal.

Assim, dado um polígono  $F$  de vértices consecutivos  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , faremos a expansão do lado  $V_1V_n$ , onde  $V_1 = (0, 0)$ ,  $V_n = (0, l)$ . O comprimento do lado  $V_1V_n$  é então  $l$ . Reescrevemos então a Equação (3.5) como

$$P(F) - l + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - l)^2} = 4\sqrt{A(F) + \frac{lx}{2}} \quad (3.6)$$

Dependendo da dimensão fractal do polígono a curva de expansão apresenta diferentes configurações. Caso  $D = 1$ , o lado de expansão coincide com parte da curva (Figura 10a). Quando  $D > 1$ , a curva de expansão não possui interseção com o polígono  $F$  e está contida em um quadrado de lado  $l$  (Figura 10b). Já no caso de  $D < 1$ , parte da curva é interior ao polígono  $F$  (Figura 10c).

Em todos os casos, a curva de expansão possui interseção com o eixo  $y = \frac{l}{2}$ . Fixando  $y = \frac{l}{2}$  na Equação (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} P(F) - l + \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2} - l\right)^2} &= 4\sqrt{A(F) + \frac{lx}{2}} \\ P(F) - l + \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} + \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} &= 4\sqrt{A(F) + \frac{lx}{2}} \\ P(F) - l + 2\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} - 4\sqrt{A(F) + \frac{lx}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Portanto, para definir a condição de existência da curva, basta estudarmos para quais condições a Equação (3.7) admite soluções reais.

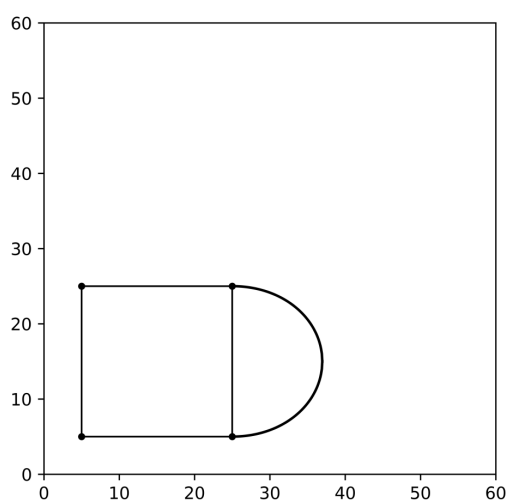
Portanto, dado um lado  $V_1V_n$  do polígono  $F$ , a curva de expansão existe se, e somente se,  $\exists x \in \mathbb{R}^+$  que satisfaz a Equação (3.7). É importante destacar que a equação não está restrita para os casos com lado de expansão sobreposto ao eixo  $oy$ , contudo se este for o caso e se  $x_1, x_2$  são as raízes da Equação (3.7), então as retas  $x = x_1$  e  $x = x_2$  delimitam a curva de expansão.

Contudo, através do processo inverso de rotação e translação que sobreporia o lado de expansão com o eixo  $oy$ , é possível obter duas retas que limitem um curva de expansão de um lado qualquer (Figura 12).

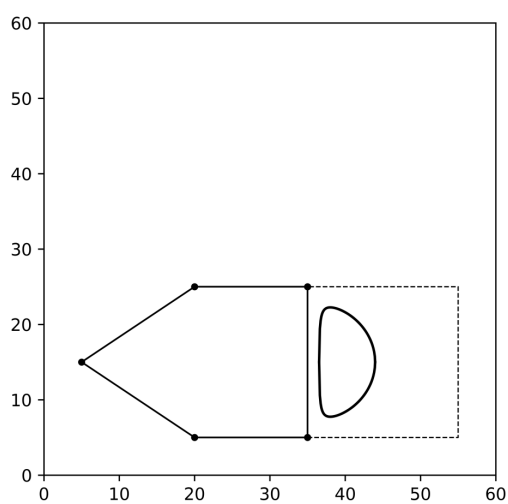
Além disso, visto que o comprimento do lado de expansão é uma das incógnitas da Equação (3.7), em um mesmo polígono podem existir tanto lados expansíveis quanto lados que não podem ser expandidos.

Para testar essa teoria criamos dois polígonos irregulares (Figura 13) e aplicamos a Equação (3.7) nos valores de cada um dos lados para testar quais lados poderiam ser

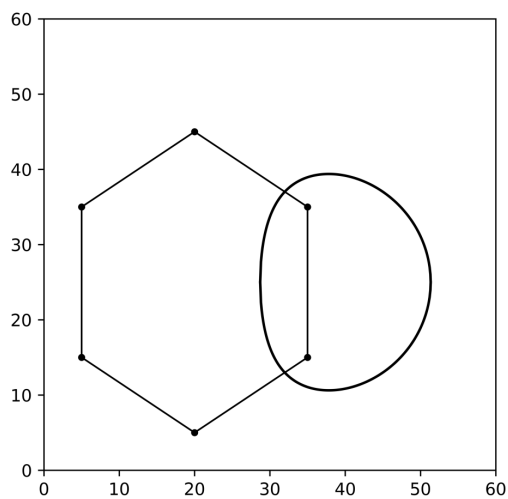
Figura 10 – As diferentes possibilidades para a curva de expansão dependendo da dimensão fractal do polígono.



(a) Curva de expansão em um polígono em que  $D = 1$ .



(b) Curva de expansão em um polígono em que  $D = 1,00461$ .



(c) Curva de expansão em um polígono em que  $D = 0,98001$ .



Figura 11 – A curva de expansão é delimitada pela retas  $x = -2,42022$  e  $x = 5,52158$ , soluções da Equação (3.7) para o polígono descrito.

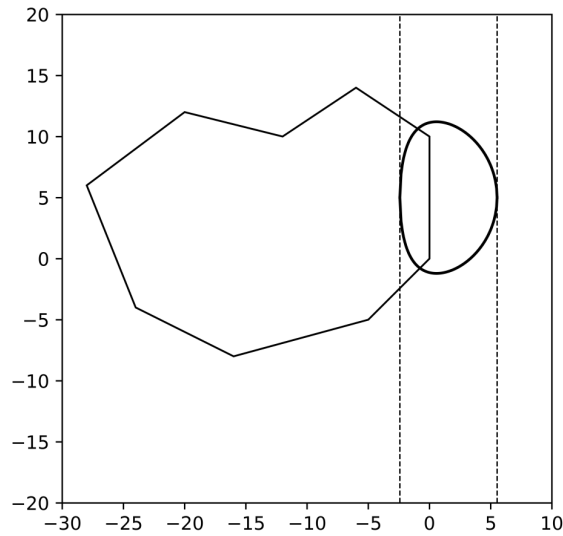
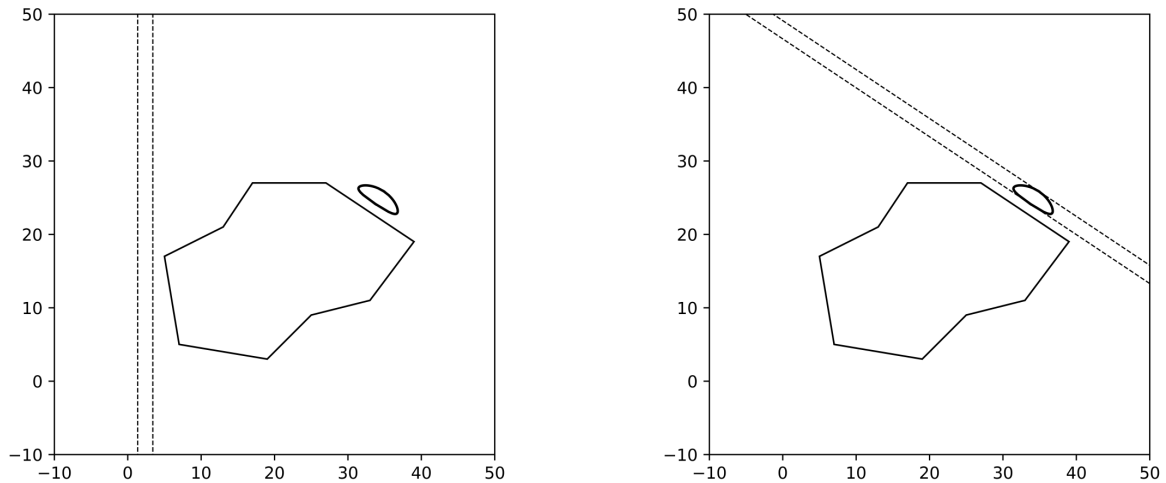


Figura 12 – Uma vez que o lado de expansão de polígono não coincide com o eixo  $oy$ , as retas fornecidas pelas raízes da Equação (3.7) não delimitam a curva de expansão, contudo, através de rotação e translação inversos aos necessários para levar o lado de expansão ao eixo  $oy$  é possível fazer com que as retas delimitem a curva de expansão para um lado não-paralelo ao eixo  $oy$ .

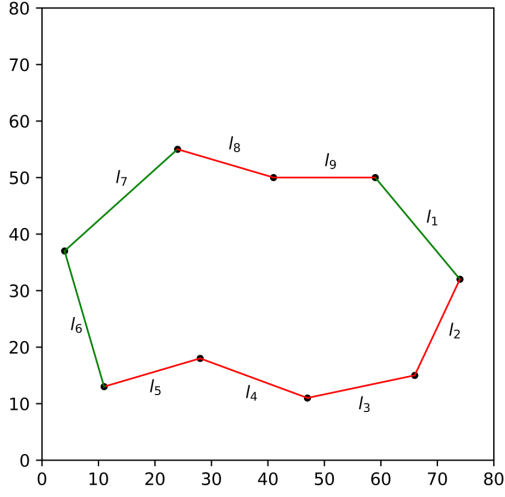


expandidos. Observando as Tabelas 3 e 4 podemos notar que os lados que não admitem expansão são sempre os menores.

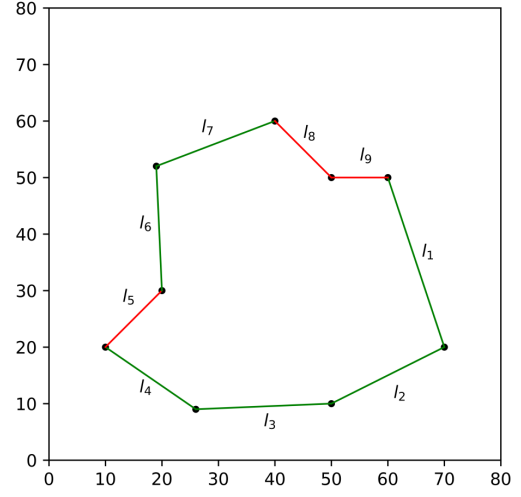
Em cada um dos exemplos, fixando perímetro e área na Equação (3.7) e calculando o lado em função de  $x$ , podemos ver que existe um limite inferior do comprimento do lado para que existam as raízes reais da equação (Figura 14).

Uma vez que não existe um limite máximo do tamanho do lado para que o lado possa ser expandido, a melhor forma para testar se um polígono pode ser expandido é

Figura 13 – Conforme os resultados obtidos com a aplicação do teste da Equação (3.7), os lados destacados em verde admitem expansão, enquanto os lados que não admitem expansão foram destacados em vermelho.



(a) Polígono 1



(b) Polígono 2

Tabela 3 – Os valores de comprimento do lado e as raízes da Equação (3.7) para cada um dos lados da Figura 13a.

	Comprimento (u.m.)	Raízes
$l_1$	23,43075	$\{1,39593; 4,68283\}$
$l_2$	18,78829	$\emptyset$
$l_3$	19,41649	$\emptyset$
$l_4$	20,24846	$\emptyset$
$l_5$	17,72005	$\emptyset$
$l_6$	25,0	$\{1,22052; 5,75959\}$
$l_7$	26,90725	$\{1,07686; 7,09556\}$
$l_8$	17,72005	$\emptyset$
$l_9$	18,0	$\emptyset$

então calcular a Equação (3.7) para o maior lado do polígono.

Seja  $l_m$  o comprimento do maior lado de um polígono  $F$ , então  $F$  admite expansão se, e somente se, a equação

$$P(F) - l_m + 2\sqrt{x^2 + \frac{l_m^2}{4}} - 4\sqrt{A(F) + \frac{l_m x}{2}} = 0 \quad (3.8)$$

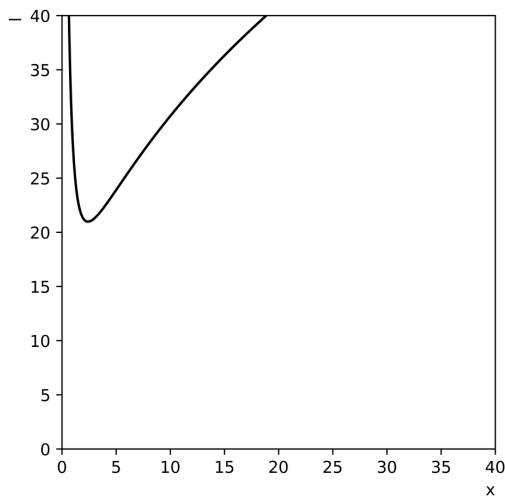
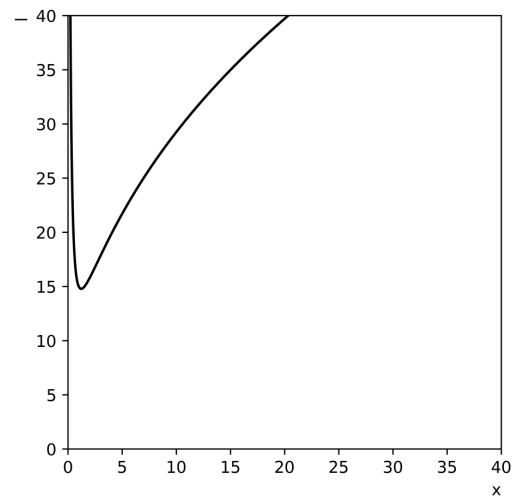
admite soluções reais.

É preciso salientar que o teste de existência é necessário apenas para polígonos com dimensão perímetro-área maior do que 1 uma vez que polígonos com dimensão menor do que 1 sempre podem ser expandidos. Para provar isso, suponha que exista um polígono  $F$ , com área  $A$  e perímetro  $P$  tal que  $l = 0$  satisfaz a Equação (3.7). Podemos então reescrever

Tabela 4 – Os valores de comprimento do lado e as raízes da Equação (3.7) para cada um dos lados da Figura 13b.

	Comprimento (u.m.)	Raízes
$l_1$	31,62278	$\{0,29241; 11,94003\}$
$l_2$	22,36068	$\{0,43704; 5,37903\}$
$l_3$	24,02082	$\{0,39976; 6,36857\}$
$l_4$	19,41649	$\{0,53104; 3,79283\}$
$l_5$	14,14214	$\emptyset$
$l_6$	22,02272	$\{0,44571; 5,18647\}$
$l_7$	22,47221	$\{0,43428; 5,44322\}$
$l_8$	14,14214	$\emptyset$
$l_9$	10,0	$\emptyset$

Figura 14 – Curvas obtidas fixando o perímetro e a área na Equação (3.7) de acordo com os valores obtidos nos polígonos da Figura 13.

(a) Gráfico do polígono da Figura 13a, onde  $P = 187,23133$  u.m. e  $A = 2178,5$  u.m.(b) Gráfico do polígono da Figura 13b, onde  $P = 180,19996$  u.m. e  $A = 2025,0$  u.m.

a Equação (3.7) como

$$P + 2\sqrt{x^2} - 4\sqrt{A} = 0$$

portanto

$$|x| = \frac{4\sqrt{A} - P}{2}$$

Consequentemente  $4\sqrt{A} \geq P$ . Se  $P \geq 1$  e  $A > 1$ , então  $2\frac{\ln\left(\frac{P}{4}\right)}{\ln(A)} < 1$ . Ou seja,  $F$  tem dimensão perímetro-área menor do que 1.

## 3.5 Aplicação à Ecologia de Paisagem

Embora um fragmento com dimensão fractal próxima ou igual a 1 seja inicialmente visto como algo ruim uma vez que este é um indicativo de ação antrópica ([KRUMMEL et al., 1987](#); [LOPEZ; FROHN, 2017](#)), para fragmentos já afetados pela ação humana, a expansão pode ser benéfica.

Uma vez que os polígonos expandidos mantêm a mesma relação perímetro-área que o quadrado, fragmentos de paisagem recuperados através da expansão também manteriam essa relação perímetro-área o que diminuiria o efeito de borda.

A Subseção [6.4.1](#) ilustra, com o uso do aplicativo, a aplicação do método de expansão de fragmentos de paisagem na análise de fragmentos da bacia do Rio Catu.

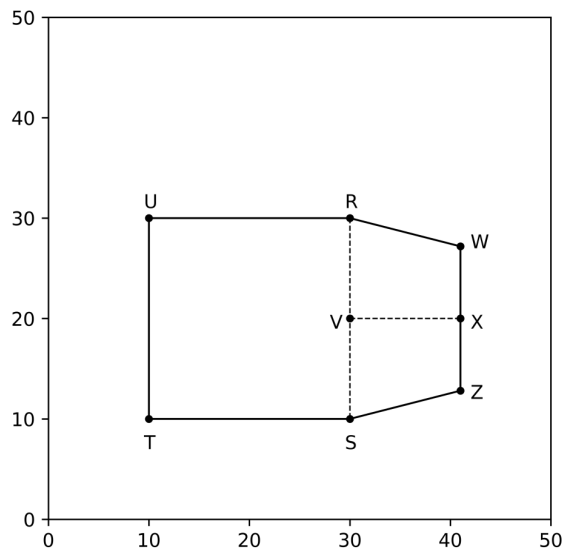
## 4 Expansão por Trapézio

No Capítulo 3 definimos um método de recuperação de fragmentos florestais para que eles tivessem a relação perímetro-área desejada a partir da adição de um triângulo. Entretanto, é possível realizar a expansão de um polígono através da adição de outros polígonos. Neste capítulo desenvolveremos a expansão de um polígono  $F$  qualquer em um polígono  $F'$  com dimensão fractal igual a 1 através da adição de um trapézio isósceles. Também explicamos qual a vantagem do desenvolvimento de métodos de expansão de se baseiem em polígonos diferentes do triângulo.

### 4.1 Expansão a partir de um quadrado

Dado um quadrado de vértices consecutivos  $R, S, T, U$ , objetivamos definir dois pontos  $W$  e  $Z$  tais que o hexágono  $RWZSTU$  tenha dimensão fractal, conforme a Equação (1.5), igual a 1 e o quadrilátero  $RWZS$  seja um trapézio isósceles (Figura 15).

Figura 15 – Hexágono  $RWZSTU$  com dimensão fractal igual a 1 criado a partir da expansão por trapézio do quadrado  $RSTU$ .



De modo a facilitarmos nossas contas, vamos supor que o lado  $RS$  esteja paralelo ao eixo  $oy$ , esta contudo não é uma restrição, pois, como já dito na Seção 3.4, a dimensão fractal é invariante por rotação. Nessas condições, se  $R = (x_R, y_R)$  e  $S = (x_S, y_S)$ , então  $x_R = x_S = x_{RS}$ , portanto os pontos  $W$  e  $Z$  podem ser escritos como:

$$W = \left( x_{RS} + i, \frac{y_R + y_S}{2} + j \right)$$

$$Z = \left( x_{RS} + i, \frac{y_R + y_S}{2} - j \right)$$

onde  $i, j \in \mathbb{R}^+$ .

Os comprimentos dos lados  $RS$ ,  $RW$ ,  $WZ$  e  $ZS$  são respectivamente dados por

$$\begin{aligned} d(R, S) &= |y_S - y_R| \\ d(R, W) &= \sqrt{i^2 + \left( \frac{y_S - y_R}{2} + j \right)^2} \\ d(W, Z) &= 2j \\ d(Z, S) &= \sqrt{i^2 + \left( \frac{y_S - y_R}{2} + j \right)^2} \end{aligned}$$

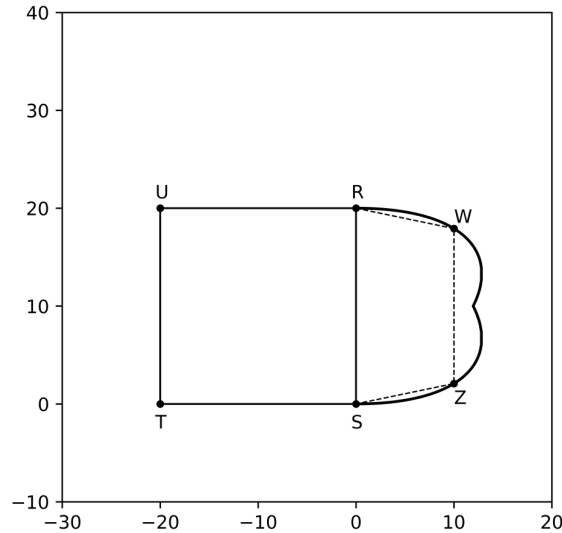
Assim perímetro e área do hexágono  $RWZSTU$  são respectivamente

$$\begin{aligned} P_{RWZSTU} &= 3|y_S - y_R| + 2j + 2\sqrt{i^2 + \left( \frac{y_S - y_R}{2} + j \right)^2} \\ A_{RWZSTU} &= |y_S - y_R|^2 \frac{(|y_S - y_R| + 2j)i}{2} \end{aligned}$$

Para que a dimensão de  $RWZSTU$ ,  $D_{RWZSTU}$ , seja igual a 1 precisamos então que

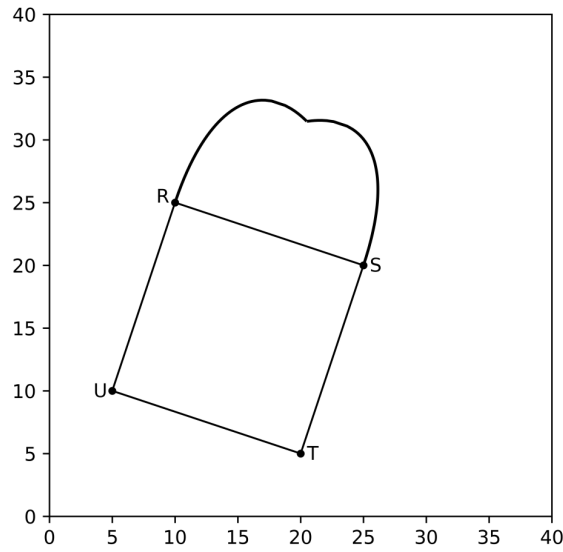
$$3|y_S - y_R| + 2j + 2\sqrt{i^2 + \left( \frac{y_S - y_R}{2} + j \right)^2} = 4\sqrt{|y_S - y_R|^2 + \frac{(|y_S - y_R| + 2j)i}{2}} \quad (4.1)$$

Figura 16 – Lugar geométrico dos pontos  $W$  e  $Z$  tais que  $RWZSTU$  é um hexágono com dimensão fractal, conforme a Equação (1.5), igual a 1 e o quadrilátero  $RWZS$  é um trapézio isósceles, para um quadrado  $RSTU$  cujo lado  $RS$  é paralelo ao eixo  $oy$  e  $S$  coincide com a origem.



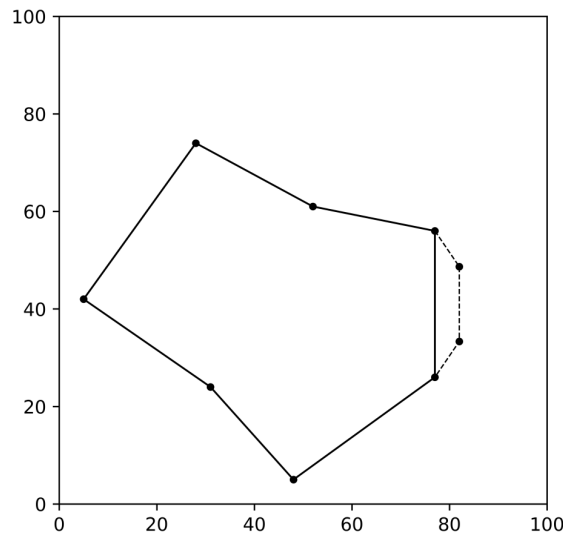
Podemos simplificar ainda mais as nossas contas sem comprometer a generalidade trasladando o lado  $RS$ , já rotacionado, de modo que  $R = (0, l)$  e  $S = (0, 0)$ . Nessas condições

$$3l + 2j + 2\sqrt{i^2 + \left( j - \frac{l}{2} \right)^2} = 4\sqrt{l^2 + \frac{(l + 2j)i}{2}} \quad (4.2)$$

Figura 17 – Curva de expansão do quadrado  $RSTU$  para  $RS$  não paralelo ao eixo  $oy$ .

## 4.2 Expansão de um polígono qualquer

Figura 18 – Expansão de um heptágono qualquer para um eneágono com dimensão fractal igual a 1.



Para generalizar o processo de expansão por pentágono para um polígono qualquer, definindo um polígono  $F$  com  $n$  vértices consecutivos  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Se o lado  $V_1V_n$  é paralelo ao eixo  $oy$  e  $V_n$  e  $V_{n+1}$  e  $V_{n+2}$  são os vértices acrescentados a  $F$  por expansão por trapézio formando um polígono  $F'$ , então o perímetro e a área de  $F'$  são dados respectivamente por

$$P(F') = P(F) - d(V_1, V_n) + d(V_1, V_{n+1}) + d(V_{n+1}, V_{n+2}) + d(V_{n+2}, V_n)$$

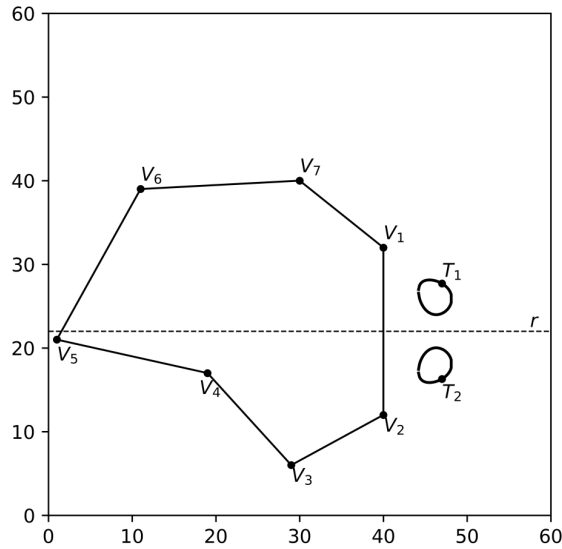
$$A(F') = A(F) + A(T)$$

onde  $T$  é o trapézio isósceles de vértices  $V_1, V_{n+1}, V_{n+2}$  e  $V_n$ . Sendo assim, a curva de estabilidade fractal é dada pela equação

$$P(F) - |y_n - y_1| + 2j + 2\sqrt{i^2 + \left(\frac{y_n - y_1}{2} + j\right)^2} = 4\sqrt{A(F) + \frac{(|y_n - y_1| + 2j)i}{2}} \quad (4.3)$$

É necessário salientar que a curva de expansão por trapézio é simétrica em relação a reta ortogonal ao lado de expansão e que passa pelo ponto médio. Cada lado da curva fornece um dos vértices do trapézio (Figura 19).

Figura 19 – A curva de expansão por trapézio do lado  $V_1V_2$  do heptágono  $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7$  é simétrica em relação a reta  $r$  que é ortogonal ao lado de expansão e passa por seu ponto médio.



Não foi encontrada uma condição de existência pra a curva de expansão por trapézio, contudo,  $h$  é sempre menor do que o comprimento do lado de expansão.

### 4.3 Expansão por triângulo $\times$ expansão por trapézio

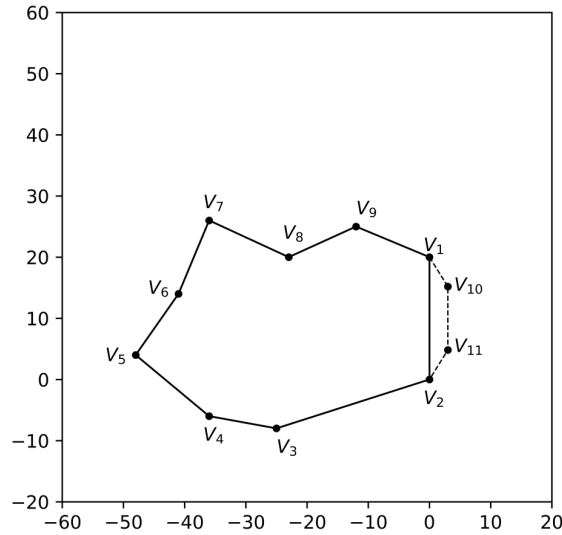
Note que, para  $j = 0$ ,  $V_{n+1} = V_{n+2}$  e Equação (4.3) fornece um triângulo isósceles, ou seja, a Equação (4.3), se torna igual a Equação (3.6) para  $y = \frac{l}{2}$ . Com isso vemos que, sempre que a expansão por triângulo é possível, a expansão por trapézio também é.

A vantagem da expansão por trapézio sobre a expansão por triângulo está no fato de que existem casos em que não é possível expandir um polígono por triângulo, mas expansão por trapézio pode ser feita (Figura 20).

Essas possibilidades de expansão adicionais, fornecem uma gama de novos fragmentos que podem recuperados.



Figura 20 – O eneágono  $E$  de vértices consecutivos  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8$  e  $V_9$  tem perímetro e área respectivamente iguais a  $137,65707138873026$  e  $1168,5$ . De acordo com a Equação (3.7), seu lado  $V_1V_2$  de comprimento 20 não pode ser expandido, contudo através da expansão por pentágono conseguimos dois pontos  $V_{10}$  e  $V_{11}$  que expandem  $E$  em um undecágono com dimensão fractal igual a 1.



Caso apenas a curva de expansão por trapézio exista, então os lados da curva de expansão não se tocam, uma vez que uma expansão por triângulo isósceles não tornaria a dimensão do polígono igual a 1 (Figura 20).

## 5 Interpretação Geométrica da Constante de Proporcionalidade da Dimensão Fractal

### 5.1 Constante de proporcionalidade de um polígono regular

Nas Figuras 3a e 3b vimos que o gráfico da dimensão fractal, conforme a Equação (1.5), de um triângulo equilátero e um pentágono regular em função do seu lado não são constantes. Contudo a Figura 3c mostra que a dimensão fractal, conforme a Equação (1.5), de um quadrado é sempre igual a 1 independente do tamanho do lado.

A Figura 21 nos mostra que, quando alteramos a constante de proporcionalidade da Equação (1.3), o gráfico da dimensão fractal de um pentágono regular em função do comprimento de seu lado exibe diferentes comportamentos.

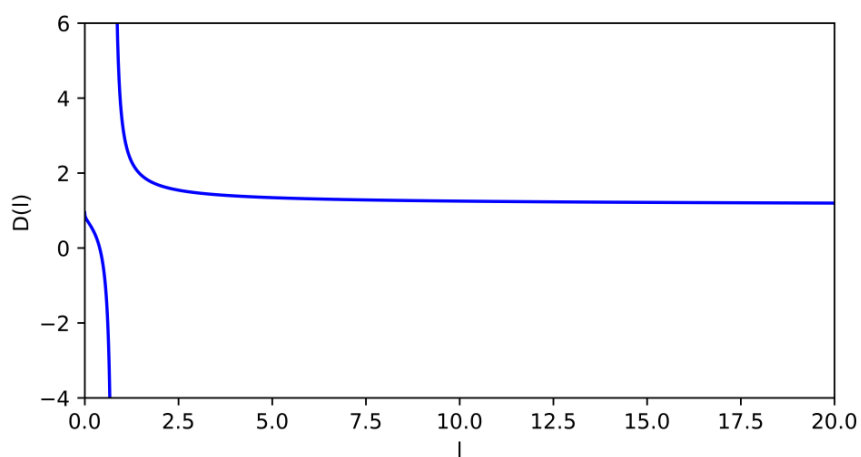
Para  $k$  igual  $2\sqrt{5 \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}$  que é o valor da constante de proporcionalidade de um pentágono definido conforme a Equação (1.9), o gráfico é constante (Figura 21c), contudo para valores de  $k$  diferentes do definido pela Equação (1.9) o gráfico exibe comportamentos variados conforme  $k$  se torna maior ou menor do que  $2\sqrt{5 \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ .

O mesmo ocorre com outros polígonos regulares se calcularmos suas dimensões fractais utilizando suas respectivas constantes de proporcionalidade, ou seja, utilizando a Equação (1.9). Uma vez que um polígono regular de  $n$  lados tem constante conforme a Equação (1.9) igual a  $2\sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ , o valor da sua dimensão fractal de  $F$  em função do comprimento de seu lado é dada por

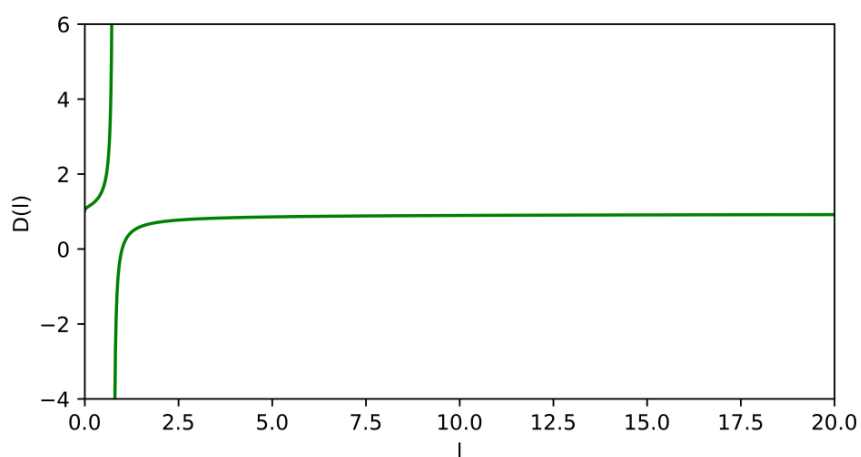
$$D(l) = 2 \frac{\ln\left(\frac{P}{2\sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)}{\ln A} = 2 \frac{\ln\left(\frac{nl}{2\sqrt{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)}{\ln\left(\frac{nl^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{nl^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{nl^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)} = 1$$

Portanto, é possível atrelarmos um significado geométrico à constante de proporcionalidade, o que contraria Chen o qual afirma que “na geometria fractal, o coeficiente de proporcionalidade transmite pouca informação” (CHEN, 2020, p. 12, tradução nossa).

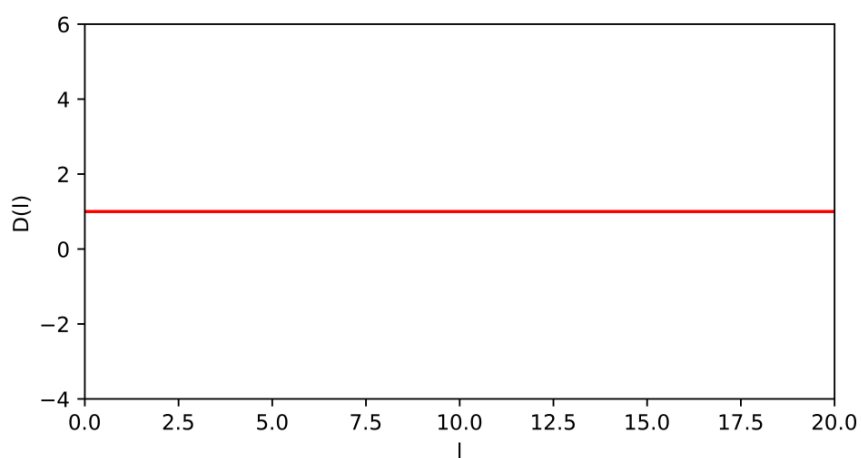
Figura 21 – Gráficos da dimensão fractal,  $D(l)$ , de um pentágono regular em função do comprimento de lado  $l$  para diferentes valores de  $k$ .



(a)  $k = 2$



(b)  $k = 5$



(c)  $k = 2\sqrt{5 \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} \approx 3,81194$

## 5.2 Constante de proporcionalidade de um polígono qualquer

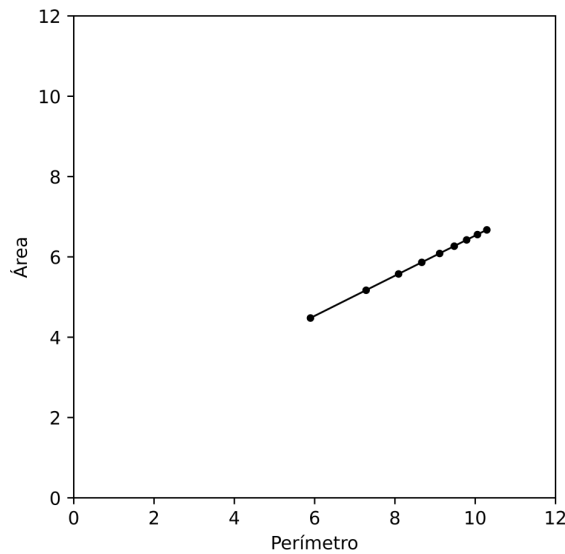
Note que, dado um polígono qualquer  $F$ , se a dimensão fractal de  $F$ , conforme a Equação (1.5) é igual a 1, então  $F$  tem a mesma constante de proporcionalidade que o quadrado:

$$D(F) = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\ln\left(\frac{P(F)}{4}\right)}{\ln(A(F))} = 1 \Rightarrow P(F) = 4\sqrt{A(F)}$$

É possível portanto determinar a constante de proporcionalidade associada a um polígono qualquer.

Um dos métodos para determinar a constante é com o uso da regressão linear nos dados do logaritmo do perímetro pelo logaritmo da área de diferentes polígonos obtidos através de homotetia, contudo, ao invés da inclinação da reta, que nos fornece a dimensão fractal, a constante é obtida através do valor intercepto  $y$ .

Figura 22 – Reta de regressão do logaritmo do perímetro contra o logaritmo da área das homotetias do polígono visto na Figura 2.



Aplicando homotetias sucessivas ao polígono da Figura 2 e aplicando a regressão linear aos dados, obtemos a reta  $0,5x + 1,52827$  vista na Figura 2. Portanto a constante de proporcionalidade da figura é  $e^{1,52827} \approx 4,61019$ . Observe que a dimensão fractal é o dobro da inclinação da reta de regressão, portanto igual a 1.

Contudo a função exponencial possui uma grande taxa de variação, portanto o número de casas decimais escolhido pode fazer grande diferença na determinação da constante de proporcionalidade perímetro-área. Assim, outro método para determinar a constante é derivado da Equação (1.2), a reescrita como

$$k = \frac{P}{\sqrt{A}} \quad (5.1)$$

Tabela 5 – Tabela contendo os valores de razão de homotetia ( $R_H$ ), perímetro ( $P$ ) e área ( $A$ ) utilizados no gráfico da Figura 22.

$R_H$	$P$ (u.m.)	$A$ (u.m.)
1	87,92204	363,715
2	175,84408	1454,86
3	263,76612	3273,435
4	351,68816	5819,44
5	439,6102	9092,875
6	527,53224	13093,74
7	615,45428	17822,035
8	703,37632	23277,76
9	791,29836	29460,915

Podemos provar que, dado um polígono  $F$ , para  $k = \frac{P(F)}{\sqrt{A(F)}}$ , os polígonos obtidos de  $F$  através de homotetia possuem dimensão fractal igual a 1. De fato, dado um polígono  $F$  de vértices  $v_i = (x_i, y_i), i \in \{1, \dots, n\}$ . Sabemos que a área de  $F$  é dada pela equação

$$A(F) = \frac{(x_1y_2 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + \dots + y_nx_1)}{2}$$

enquanto o perímetro de  $F$  é dado pela equação

$$P(F) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \dots + \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}$$

Seja  $F_\lambda$  uma homotetia de  $F$  com razão  $\lambda$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Então os vértices de  $F_\lambda$  são os pontos  $\lambda v_i = (\lambda x_i, \lambda y_i), i \in \{1, \dots, n\}$ . Consequentemente, a área de  $F_\lambda$  é igual a

$$\begin{aligned} A(F_\lambda) &= \frac{(\lambda x_1 \lambda y_2 + \dots + \lambda x_n \lambda y_1) - (\lambda y_1 \lambda x_2 + \dots + \lambda y_n \lambda x_1)}{2} = \\ &\lambda^2 \left[ \frac{(x_1y_2 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + \dots + y_nx_1)}{2} \right] = \lambda^2 A(F) \end{aligned}$$

enquanto o perímetro de  $F_\lambda$  é

$$\begin{aligned} P(F_\lambda) &= \sqrt{(\lambda x_1 - \lambda x_2)^2 + (\lambda y_1 - \lambda y_2)^2} + \dots + \sqrt{(\lambda x_n - \lambda x_1)^2 + (\lambda y_n - \lambda y_1)^2} \\ &\lambda \left[ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \dots + \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} \right] = \lambda P(F) \end{aligned}$$

Se  $k = \frac{P(F)}{\sqrt{A(F)}}$ , a dimensão fractal de  $F_\lambda$  é

$$D(F_\lambda) = 2 \frac{\ln \left( \frac{P(F_\lambda)}{k} \right)}{\ln(A(F_\lambda))} = 2 \frac{\ln \left( \frac{P(F_\lambda)}{P(F)} \right)}{\ln(A(F_\lambda))} = 2 \frac{\ln \left( \frac{\lambda P(F)}{P(F)} \right)}{\ln(\lambda^2 A(F))} = \frac{\ln \left( (\lambda \sqrt{A(F)})^2 \right)}{\ln(\lambda^2 A(F))} = 1$$

Tabela 6 – Valores de  $k$ , de acordo com a Equação (5.1) para alguns dos polígonos apresentados.

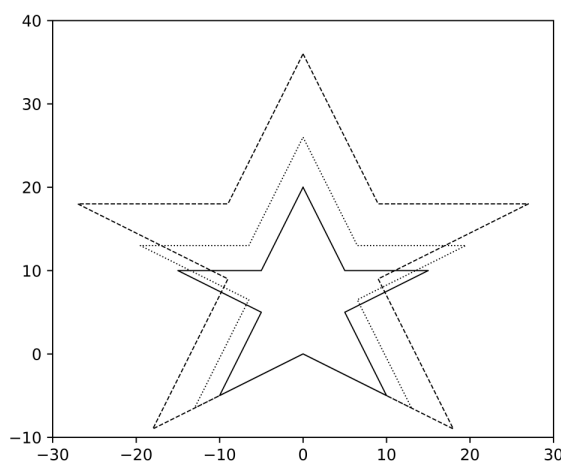
Nº da Figura	$k$
2	4,61017
10b	4,0567
10c	3,73703
11	3,89018
12	4,02644
13a	4,01143
13b	4,00444

### 5.3 O papel da constante na análise de elementos da natureza

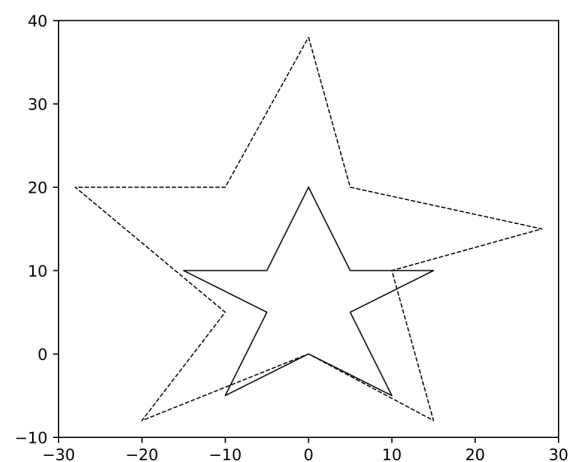
Dado um elemento da natureza é possível calcularmos sua constante de proporcionalidade aproximada. Fixando  $k$  para esse objeto, então ao calcularmos a dimensão fractal de uma amostra do mesmo tipo de elemento pela Equação (1.3), o valor da dimensão passa a ser portanto uma medida do quanto a relação perímetro-área da amostra se desvia do padrão (TRIPATHI et al., 2015).

Para elementos da natureza que seguem um formato fixo, como favos de mel ou folhas de determinadas plantas, amostras com dimensão muito distante de 1 indicam amostras que perderam seu formato específico, o que em muitos casos, como no das plantas, pode ser um sinal de doenças.

Figura 23 – Para elementos da natureza em que se espera que o formato seja mantida durante o crescimento, cada fase subsequente é uma homotetia aproximada da original e deve manter uma dimensão perímetro-área próxima de 1 para a constante do objeto original.



(a) Formato preservado com o crescimento.



(b) Formato deformado com o crescimento.

Em fragmentos florestais, definindo  $k$  a partir de um fragmento que possua uma

boa relação perímetro-área é possível adaptar a expansão desenvolvida no Capítulo 3, trocando 4 na Equação (3.5) pelo valor de  $k$ .

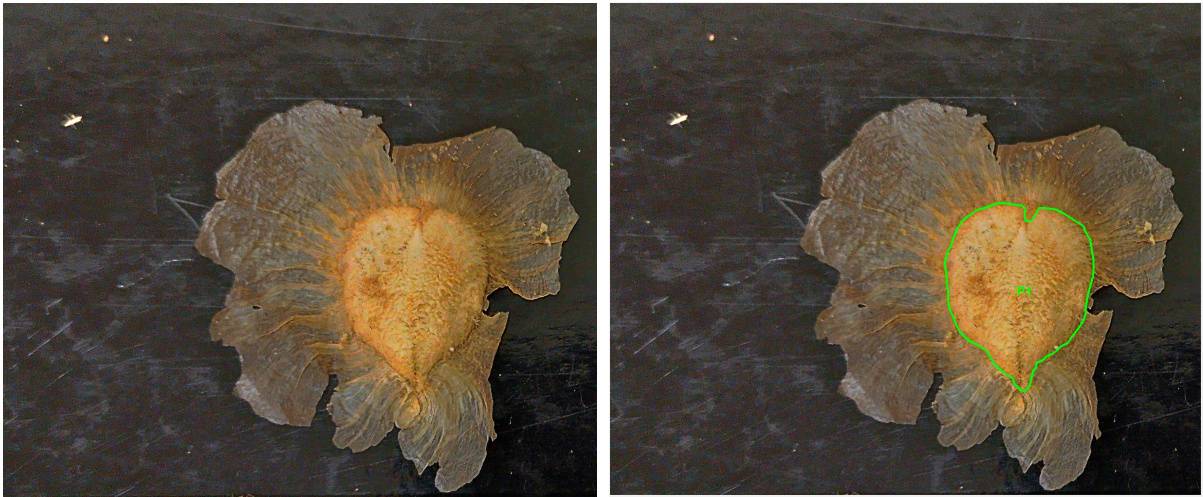
Portanto, se  $V_1 = (x_1, y_1), V_2 = (x_2, y_2), \dots, V_n = (x_n, y_n)$  são vértices consecutivos de um polígono  $F$ . Os pontos  $V$  tais que o polígono de vértices consecutivos  $V_1V_2 \dots V_nV$  tem dimensão fractal igual a 1, são os pontos  $(x, y)$  que satisfazem a equação

$$P(F) - d + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} = k \sqrt{A(F) + \frac{x_1y_n + x_ny + y_1x - x_1y - y_1x_n - y_nx}{2}} \quad (5.2)$$

### 5.3.1 Aplicação

Como um exemplo da aplicação do análise da constante de proporcionalidade foi realizado o estudo do formato de 33 amostras de sementes de *Zeyheria tuberculosa* (Vell.) Bureau ex Verl. Com o uso do aplicativo FracFor, as sementes tiveram seu contorno delineado para que os valores perímetros, áreas e constantes de proporcionalidade de cada uma delas pudesse ser medido.

Figura 24 – Foto da Amostra 01 das sementes de *Zeyheria tuberculosa* (Vell.) Bureau ex Verl. A imagem da direita mostra o contorno da semente feito com o uso do aplicativo FracFor.



Em seguida as sementes foram ordenadas de acordo com o valor de suas áreas e as amostras foram então divididas em 3 grupos, A, B e C, com 11 sementes. Cada grupo teve então sua dimensão perímetro-área calculada utilizando a constante de proporcionalidade da semente de menor área daquele grupo (Figura 25).

Os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ), constante de proporcionalidade  $k$  e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) das amostras de cada grupo podem ser vistos nas Tabelas 7, 8 e 9. Os valores de área e perímetro estão respectivamente em  $mm^2$  e  $mm$ , enquanto os valores da constante e dimensão perímetro-área são adimensionais. No Grupo A a dimensão foi

Tabela 7 – Dados do Grupo A.

Nº Semente	$A$ (mm <sup>2</sup> )	$P$ (mm)	$k$	$D_F$
14	194,68684	54,12209	3,87888	0,96390
12	190,93159	55,23719	3,99754	0,97524
21	189,04608	51,41560	3,73948	0,94974
11	187,00769	52,44809	3,83531	0,95931
27	186,67888	54,19304	3,96639	0,97215
06	181,67755	51,62298	3,82994	0,95854
07	181,02114	51,70817	3,84321	0,95984
04	180,83186	54,63497	4,06287	0,98122
01	180,29314	53,17112	3,95992	0,97133
16	174,16705	51,39544	3,89441	0,96467
03	168,06523	55,30505	4,26605	1,00000

Tabela 8 – Dados do Grupo B.

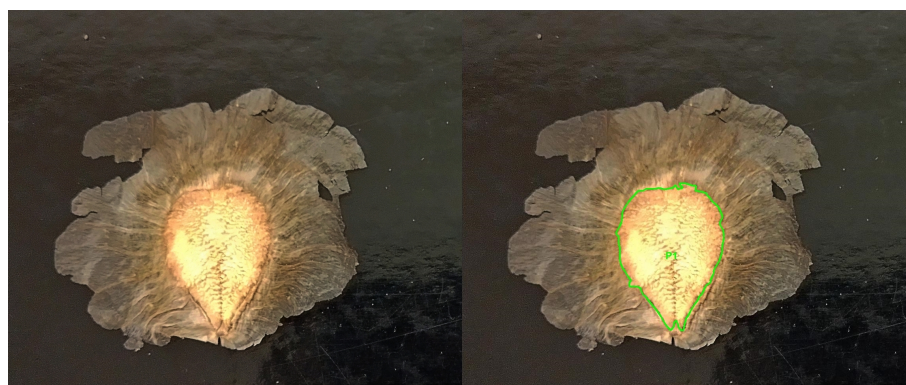
Nº Semente	$A$ (mm <sup>2</sup> )	$P$ (mm)	$k$	$D_F$
33	163,53224	49,25707	3,85183	0,98918
05	161,42348	51,54862	4,05727	1,00959
02	160,09852	50,16492	3,96466	1,00051
13	159,78184	49,54568	3,91960	0,99600
20	156,15400	50,07425	4,00717	1,00473
30	150,85782	47,63910	3,87864	0,99177
17	150,84690	49,53350	4,03302	1,00733
28	147,97132	47,07926	3,87027	0,99087
19	147,47628	49,24914	4,05544	1,00958
29	146,27023	49,69670	4,10913	1,01488
18	145,67813	47,79063	3,95955	1,00000

Tabela 9 – Dados do Grupo C.

Nº Semente	$A$ (mm <sup>2</sup> )	$P$ (mm)	$k$	$D_F$
08	144,90524	47,03896	3,90765	1,00799
10	134,67689	46,21284	3,98214	1,01581
26	129,28122	47,48729	4,17647	1,03555
15	124,16826	48,10404	4,31694	1,04956
09	113,27865	43,38847	4,07662	1,02631
31	101,55306	39,35124	3,90492	1,00830
32	78,51076	37,92161	4,27979	1,05081
22	75,03094	39,28655	4,53549	1,07822
24	60,62996	30,80901	3,95671	1,01577
25	40,45597	26,39739	4,15021	1,04330
23	30,35138	21,10429	3,83073	1,00000



Figura 25 – Sementes de *Zeyheria tuberculosa* (Vell.) Bureau ex Verl cujas constantes de proporcionalidade perímetro-área foram utilizadas para o cálculo da dimensão do grupo.



(a) Amostra 03



(b) Amostra 18



(c) Amostra 23

calculada utilizando a constante da Amostra 03 (Figura 25a), enquanto no Grupo B foi utilizada a constante da Amostra 18 (Figura 25b) e no Grupo C foi utilizada a constante da Amostra 23 (Figura 25c). Todos os valores possuem uma aproximação de 5 casas decimais.

Analisando cada tabela, pode-se observar que todas as sementes do Grupo A apresentaram dimensão perímetro-área menor do que 1, enquanto no Grupo C todas as amostras tiveram dimensão maior do que 1, o Grupo B, entretanto, apresentou amostras com dimensões maiores e menores que 1.

Foi calculado o desvio padrão dos valores das dimensões das amostras de cada um dos grupos (Tabela 10). Os Grupos B e C apresentaram respectivamente o menor e maior desvio padrão.

Tabela 10 – Desvio padrão dos valores de dimensões perímetro-área em cada grupo.

	$\sigma$ (mm)
Grupo A	0,01366
Grupo B	0,00864
Grupo C	0,02371

## 6 Aplicativo

Para que a expansão de fragmentos de paisagem possa ser posta em prática, almeja-se a criação de aplicativo que permita a análise de fragmentos de paisagem através de imagens de satélite. O primeiro passo para isso foi a criação, em linguagem Python, de diversas funções para o cálculo e exibição das curvas de expansão.

### 6.1 Funções Auxiliares

Com o objetivo de simplificar os cálculos e assim diminuir o tempo de processamento dos dados, o aplicativo baseou-se na versão simplificada da equação de expansão por triângulo (Equação (3.6)), ou seja, nos casos em que o lado de expansão está sobreposto ao eixo *oy* com um dos vértices coincidente com a origem.

Por isso foi necessário a criação de funções para a translação (Função 6.2) e rotação (Função 6.4) do lado de expansão, contudo, foi necessário primeiramente definir as Funções 6.1 e 6.3 para a automatização da definição do ponto de referência da translação e ângulo de rotação. Adicionalmente, um parâmetro *tipo* precisou ser adicionado as Funções 6.2 e 6.4 para que as funções também fossem capazes de realizarem os processos reversos de rotação e translação, levando o ponto a sua coordenada original.

Listing 6.1 – Função auxiliar para a translação.

```
def referencia_translacao(ponto1, ponto2):
    if ponto1[1] < ponto2[1]:
        return ponto1
    elif ponto1[1] == ponto2[1]:
        return ponto2
    elif ponto1[1] > ponto2[1]:
        return ponto2
```

Listing 6.2 – Função para a translação de um ponto.

```
def translacao(ponto, referencia, tipo=""):
    if tipo == "r":
        return (ponto[0]+referencia[0], ponto[1]+referencia
                ↪ [1])
    else:
        return (ponto[0]-referencia[0], ponto[1]-referencia
                ↪ [1])
```

Listing 6.3 – Função auxiliar para a rotação.

```
def angulo_rotacao(ponto1,ponto2):
    ponto3 = (ponto1[0],ponto2[1])
    if ponto1[1] == ponto2[1]:
        return math.radians(90)
    else:
        return math.radians(math.degrees(math.atan2(ponto3
        ↪ [1]-ponto1[1], ponto3[0]-ponto1[0]) - math.
        ↪ atan2(ponto2[1]-ponto1[1], ponto2[0]-ponto1[0])
        ↪ ))
```

Listing 6.4 – Função para a rotação de um ponto.

```
def rotacao(ponto,angulo,tipo=""):
    if tipo == "r":
        x = ponto[0]*math.cos(-angulo)-ponto[1]*math.sin(-
        ↪ angulo)
        y = ponto[0]*math.sin(-angulo)+ponto[1]*math.cos(-
        ↪ angulo)
        x,y = aproximar(x,9), aproximar(y,9)
        return (x,y)
    else:
        x = ponto[0]*math.cos(angulo)-ponto[1]*math.sin(
        ↪ angulo)
        y = ponto[0]*math.sin(angulo)+ponto[1]*math.cos(
        ↪ angulo)
        x,y = aproximar(x,9), aproximar(y,9)
        return (x,y)
```

A Função 6.5 foi criada para o arredondamento de valores de forma que pudesse aceitar a opção de arredondar para cima ou baixo.

Listing 6.5 – Função para arredondar valores.

```
def aproximar(numero,casas="",tipo=""):
    if casas == "":
        return numero
    else:
        if len(tipo) != 0:
            if str(tipo)[0].lower() == "c":
                return round(numero+5*10**((-1)*(casas+1)),
                ↪ casas)
```

```

        elif str(tipo)[0].lower() == "b":
            return round(numero-5*10**((-1)*(casas+1)),
                ↪ casas)

        else:
            return round(numero,casas)

    else:
        return round(numero,casas)

```

Para os cálculos das constantes da Equação (3.6) criou-se então as Funções 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 respectivamente para o cálculo do comprimento do lado de expansão, perímetro, área e dimensão do fragmento.

Listing 6.6 – Função para o cálculo do comprimento do lado de um polígono.

```

def comprimento_lado(ponto1,ponto2,casas=""):
    cl = float(sp.sqrt((ponto1[0]-ponto2[0])**2+(ponto1[1]-
        ↪ ponto2[1])**2))
    return aproximar(cl,casas)

```

Listing 6.7 – Função para o cálculo do perímetro do polígono.

```

def perimetro(poligono,casas="",tipo=""):
    p = math.fabs(poligono.perimeter)
    return aproximar(p,casas,tipo)

```

Listing 6.8 – Função para o cálculo da área do polígono.

```

def area(poligono,casas="",tipo=""):
    a = math.fabs(poligono.area)
    return aproximar(a,casas,tipo)

```

Listing 6.9 – Função para o cálculo da dimensão fractal perímetro-área do polígono.

```

def dimensao(poligono,constante=4,casas="",tipo=""):
    d = 2*sp.log(perimetro(poligono)/constante)/sp.log(area(
        ↪ poligono))
    return aproximar(d,casas,tipo)

```

Listing 6.10 – Função para o cálculo da constante de proporcionalidade perímetro-área.

```

def constante_geral(poligono,casas="",tipo=""):
    k = perimetro(poligono)/math.sqrt(area(poligono))
    return aproximar(k,casas,tipo)

```

Um parâmetro adicional foi inserido na Função 6.9 para que a dimensão perímetro-área pudesse ser calculada para  $k \neq 4$  e a Função 6.10 foi definida de acordo com a Equação 5.1 para o cálculo da constante de proporcionalidade perímetro-área.

## 6.2 Funções para a expansão por triângulo

Finalizando as definições das funções auxiliares, as funções para a construção da curva de expansão por triângulo começaram a ser criadas. Primeiramente a Equação (3.6) foi definida na Função 6.11. Um parâmetro opcional  $k$  foi adicionado para que a expansão com constante diferente de 4 pudesse ser realizada.

Listing 6.11 – Função com a Equação (3.6).

```
def equacao_expansao_triangulo(poligono, ponto1, ponto2, k=4):
    x, y = sp.symbols('x y')
    P = perimetro(poligono)
    A = area(poligono)
    l = comprimento_lado(ponto1, ponto2)
    return sp.Eq(P-l+sp.sqrt((x-ponto1[0])**2+(y-ponto1[1])
        → **2)+sp.sqrt((x-ponto2[0])**2+(y-ponto2[1])
        → **2))-k*sp.sqrt(A+((x*ponto1[1]+ponto1[0]*ponto2
        → [1]+ponto2[0]*y-(y*ponto1[0]+ponto1[1]*ponto2[0]+
        → ponto2[1]*x))/(2))), 0)
```

Em seguida a equação de condição de existência da curva (Equação (3.7)) foi definida na Função 6.12, também com um parâmetro opcional  $k$ . Foi necessário limitar o conjunto solução para apenas resultados reais, além disso o resultado precisou ser convertido para float e ordenado para que pudesse ser utilizado como os limites da curva.

Listing 6.12 – Função para o teste de existência da curva de expansão conforme a Equação (3.7).

```
def existencia_curva_triangulo(poligono, ponto1, ponto2, k=4):
    x = sp.symbols('x')
    P = perimetro(poligono)
    A = area(poligono)
    l = comprimento_lado(ponto1, ponto2)
    equacao = sp.Eq(P-l+2*sp.sqrt(x**2+l**2/4)-4*sp.sqrt(A+l*
        → x/2), 0)
    raizes = list(sp.solve(equacao, x, domain=sp.S.Reals))
    if len(raizes) == 2:
        raizes.sort()
```

```

    raizes[0] = float(raizes[0])
    raizes[1] = float(raizes[1])
    return raizes
else:
    return []

```

A Função 6.13 retorna duas listas com as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos da curva de expansão e, uma vez que a curva é calculada ponto a ponto, o parâmetro opcional `passo` determina a distância entre os pontos a serem calculados. De forma geral, o lado de expansão é transladado e rotacionado até o eixo  $oy$ , os pontos da curva são então calculados para os valores dentro dos limites fornecidos pela Função 3.7 e depois o processo de rotação e translação inverso é realizado, levando o lado e a curva até as coordenadas original. A função conta com um mecanismo para detectar se a expansão deveria acontecer para a direita ou esquerda do lado de expansão baseado na ordem e posição dos vértices do lado.

Listing 6.13 – Função que calcula os pontos da curva por triângulo.

```

def curva_expansao_triangulo(poligono, ponto1, ponto2, k=4, passo
    ↪ =1):
    x, y = sp.symbols('x_y')
    dominio = [list(), list()]
    imagem = [list(), list()]
    if (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1]) or
        ↪ (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1])
        ↪ or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
        ↪ [1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] >
        ↪ ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto1, ponto2)
        angulo = angulo_rotacao(ponto1, ponto2)
        ponto1t, ponto2t = [translacao(ponto1, referencia),
            ↪ translacao(ponto2, referencia)]
        ponto1r, ponto2r = [rotacao(ponto1t, angulo), rotacao(
            ↪ ponto2t, angulo)]
        limites = existencia_curva_triangulo(poligono, ponto1r
            ↪ , ponto2r, k)
        for m in np.append(np.arange(limites[0], limites[1],
            ↪ passo), limites[1]):
            solucao = sp.solve(equacao_expansao_triangulo(
                ↪ poligono, ponto1r, ponto2r, k).subs(x, m), y)
            if len(solucao) != 0:

```



```

        for n in range(0,len(solucao)):
            ponto_curva = (m,converter_float(solucao[
                ↪ n]))
            ponto_curva = rotacao(ponto_curva,angulo,
                ↪ 'r')
            ponto_curva = translacao(ponto_curva,
                ↪ referencia,'r')
            dominio[n].append(ponto_curva[0])
            imagem[n].append(ponto_curva[1])
    elif (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] < ponto2[1])
        ↪ or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
        ↪ [1]) or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] <
        ↪ ponto2[1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1]
        ↪ < ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto2,ponto1)
        angulo = angulo_rotacao(ponto2,ponto1)
        ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto2,referencia),
            ↪ translacao(ponto1,referencia)]
        ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto2t,angulo),rotacao(
            ↪ ponto1t,angulo)]
        limites = existencia_curva_triangulo(poligono,ponto2r
            ↪ ,ponto1r,k)
        for m in np.append(np.arange(limites[0],limites[1],
            ↪ passo),limites[1]):
            solucao = sp.solve(equacao_expansao_triangulo(
                ↪ poligono,ponto2r,ponto1r,k).subs(x, m), y)
            if len(solucao) != 0:
                for n in range(0,len(solucao)):
                    ponto_curva = (-m,converter_float(solucao
                        ↪ [n]))
                    ponto_curva = rotacao(ponto_curva,angulo,
                        ↪ 'r')
                    ponto_curva = translacao(ponto_curva,
                        ↪ referencia,'r')
                    dominio[n].append(ponto_curva[0])
                    imagem[n].append(ponto_curva[1])
    return dominio, imagem

```

Dependendo da velocidade de processamento do computador, a curva pode demorar



de ser calculada, por isso, a Função 6.14 foi criada para a obtenção de apenas um ponto da curva por triângulo.

Listing 6.14 – Função para a obtenção de um ponto da curva de expansão por triângulo

```
def ponto_curva_triangulo(poligono,ponto1,ponto2,coordenada1,
    ↪ k=4,tipo='x',numero_solucão=1):
    x, y = sp.symbols('x_y')
    if (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1]) or
    ↪ (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1])
    ↪ or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
    ↪ [1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] >
    ↪ ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto1,ponto2)
        angulo = angulo_rotacao(ponto1,ponto2)
        ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto1,referencia),
            ↪ translacao(ponto2,referencia)]
        ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto1t,angulo),rotacao(
            ↪ ponto2t,angulo)]
        equacao = equacao_expansao_triangulo(poligono,ponto1r
            ↪ ,ponto2r,k)
        if tipo == 'x':
            equacao = equacao.subs(x, coordenada1)
            solucao = sp.solve(equacao, y)
            coordenada2 = converter_float(solucao[
                ↪ numero_solucão])
            ponto_curva = (coordenada1,coordenada2)
        elif tipo == 'y':
            equacao = equacao.subs(y, coordenada1)
            solucao = sp.solve(equacao, x)
            coordenada2 = converter_float(solucao[
                ↪ numero_solucão])
            ponto_curva = (coordenada2,coordenada1)
    elif (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] < ponto2[1])
    ↪ or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
    ↪ [1]) or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] <
    ↪ ponto2[1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1]
    ↪ < ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto2,ponto1)
        angulo = angulo_rotacao(ponto2,ponto1)
        ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto2,referencia),
```

```

    ↪ translacao(ponto1, referencia)]
ponto1r, ponto2r = [rotacao(ponto2t, angulo), rotacao(
    ↪ ponto1t, angulo)]
equacao = equacao_expansao_triangulo(poligono, ponto2r
    ↪ , ponto1r, k)
if tipo == 'x':
    equacao = equacao.subs(x, coordenada1)
    solucao = sp.solve(equacao, y)
    coordenada2 = converter_float(solucao[
        ↪ numero_solucao])
    ponto_curva = (-coordenada1, coordenada2)
elif tipo == 'y':
    equacao = equacao.subs(y, coordenada1)
    solucao = sp.solve(equacao, x)
    coordenada2 = converter_float(solucao[
        ↪ numero_solucao])
    ponto_curva = (-coordenada2, coordenada1)
ponto_curva = rotacao(ponto_curva, angulo, 'r')
ponto_curva = translacao(ponto_curva, referencia, 'r')
return ponto_curva

```

### 6.3 Funções para expansão por trapézio

Após a finalização dos códigos da expansão por triângulo, os códigos para a expansão por trapézio começaram a ser desenvolvidos. Na Função 6.15, definimos a Equação (4.3), enquanto a Função 6.16 fornece a curva de expansão por trapézio.

Listing 6.15 – Função para a definição da Equação (4.3).

```

def equacao_expansao_trapezio(poligono, ponto1, ponto2, k=4):
    i, j = sp.symbols('i_j')
    P = perimetro(poligono)
    A = area(poligono)
    l = comprimento_lado(ponto1, ponto2)
    return sp.Eq(P-l+2*j+2*sp.sqrt(i**2+(j-l/2)**2)-k*sp.sqrt
        ↪ (A+(l+2*j)*i/2), 0)

```

Assim como ocorre na Função 6.13, a Função rotaciona e translada o lado de expansão até a origem, calcula os pontos da curva e depois realiza o processo reverso nos pontos da curva retornando listas com as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos. Uma vez que não

foi encontrada uma condição de existência para a curva de expansão por trapézio, a função foi configurada para ser interrompida quando  $i$  se torna maior do que o comprimento do lado de expansão.

Listing 6.16 – Função da criação da curva de expansão por trapézio.

```
def curva_expansao_trapezio(poligono,ponto1,ponto2,k=4,passo
    ↪ =1):
    i, j = sp.symbols('i_{}_j')
    dominio = [[[]],[[]],[[]],[[]]]
    imagem = [[[]],[[]],[[]],[[]]]
    l = comprimento_lado(ponto1,ponto2)
    grafico = list()
    m = 0
    if (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1]) or
        ↪ (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1])
        ↪ or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
        ↪ [1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] >
        ↪ ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto1,ponto2)
        angulo = angulo_rotacao(ponto1,ponto2)
        ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto1,referencia),
            ↪ translacao(ponto2,referencia)]
        ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto1t,angulo),rotacao(
            ↪ ponto2t,angulo)]
        while True:
            m = round(m,5)
            solucao = sp.solve(equacao_expansao_trapezio(
                ↪ poligono,ponto1r,ponto2r,k).subs(i, m), j)
            if len(solucao) != 0:
                for n in range(0,len(solucao)):
                    if str(round(solucao[n]-converter_float(
                        ↪ solucao[n]),10)) == '0':
                        grafico.append(solucao)
                        solucao[n] = converter_float(solucao[
                            ↪ n])
                    if solucao[n] >= 0:
                        trapezio1,trapezio2 = (m,l/2+
                            ↪ converter_float(solucao[n])
                            ↪ ), (m,l/2-converter_float(
                            ↪ solucao[n]))
```

```

        trapezio1, trapezio2 = [rotacao(
            ↪ trapezio1, angulo, 'r'),
            ↪ rotacao(trapezio2, angulo, 'r'
            ↪ ')]
        trapezio1, trapezio2 = [translacao
            ↪ (trapezio1, referencia, 'r'),
            ↪ translacao(trapezio2,
            ↪ referencia, 'r')]
        dominio[n][0].append(trapezio1
            ↪ [0])
        dominio[n][1].append(trapezio2
            ↪ [0])
        imagem[n][0].append(trapezio1[1])
        imagem[n][1].append(trapezio2[1])
    else:
        if len(grafico) != 0:
            if dominio[1][0][0] < dominio
                ↪ [0][0][-1]:
                return [dominio[1][0]+dominio
                    ↪ [0][0][::-1], dominio
                    ↪ [1][1]+dominio
                    ↪ [0][1][::-1]], [imagem
                    ↪ [1][0]+imagem
                    ↪ [0][0][::-1], imagem
                    ↪ [1][1]+imagem
                    ↪ [0][1][::-1]]
            else:
                return [dominio[0][0][::-1]+
                    ↪ dominio[1][0], dominio
                    ↪ [0][1][::-1]+dominio
                    ↪ [1][1]], [imagem
                    ↪ [0][0][::-1]+imagem
                    ↪ [1][0], imagem
                    ↪ [0][1][::-1]+imagem
                    ↪ [1][1]]

        if m > l:
            return dominio, imagem
        m += passo
    elif (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] < ponto2[1])

```

```

→ or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
→ [1]) or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] <
→ ponto2[1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1]
→ < ponto2[1]):
    referencia = referencia_translacao(ponto2,ponto1)
    angulo = angulo_rotacao(ponto2,ponto1)
    ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto2,referencia),
→ translacao(ponto1,referencia)]
    ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto2t,angulo),rotacao(
→ ponto1t,angulo)]
while True:
    m = round(m,5)
    solucao = sp.solve(equacao_expansao_trapezio(
→ poligono,ponto1r,ponto2r,k).subs(i, m), j)
    if len(solucao) != 0:
        for n in range(0,len(solucao)):
            if str(round(solucao[n]-converter_float(
→ solucao[n]),10)) == '0':
                grafico.append(solucao)
                solucao[n] = converter_float(solucao[
→ n])
            if solucao[n] >= 0:
                trapezio1,trapezio2 = (-m,l/2+
→ converter_float(solucao[n])
→ ), (-m,l/2-converter_float(
→ solucao[n]))
                trapezio1,trapezio2 = [rotacao(
→ trapezio1,angulo,'r'),
→ rotacao(trapezio2,angulo,'r
→ ')]
                trapezio1,trapezio2 = [translacao
→ (trapezio1,referencia,'r'),
→ translacao(trapezio2,
→ referencia,'r')]
                dominio[n][0].append(trapezio1
→ [0])
                dominio[n][1].append(trapezio2
→ [0])
                imagem[n][0].append(trapezio1[1])

```

```

        imagem[n][1].append(trapezio2[1])
    else:
        if len(grafico) != 0:
            if dominio[1][0][0] < dominio
                ↪ [0][0][-1]:
                    return [dominio[1][0]+dominio
                        ↪ [0][0][::-1],dominio
                        ↪ [1][1]+dominio
                        ↪ [0][1][::-1]], [imagem
                        ↪ [1][0]+imagem
                        ↪ [0][0][::-1],imagem
                        ↪ [1][1]+imagem
                        ↪ [0][1][::-1]]
            else:
                return [dominio[0][0][::-1]+
                    ↪ dominio[1][0],dominio
                    ↪ [0][1][::-1]+dominio
                    ↪ [1][1]], [imagem
                    ↪ [0][0][::-1]+imagem
                    ↪ [1][0],imagem
                    ↪ [0][1][::-1]+imagem
                    ↪ [1][1]]

        if m > 1:
            return dominio, imagem
        m += passo

```

Também devido ao tempo de processamento da curva, foi criada a Função 6.17 que retorna apenas um ponto da curva de expansão por trapézio.

Listing 6.17 – Função para a obtenção de um ponto da curva de expansão por trapézio.

```

def ponto_curva_trapezio(poligono,ponto1,ponto2,altura,k=4):
    i, j = sp.symbols('i_{}_j')
    l = comprimento_lado(ponto1,ponto2)
    if (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1]) or
        ↪ (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] > ponto2[1])
        ↪ or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
        ↪ [1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1] >
        ↪ ponto2[1]):
        referencia = referencia_translacao(ponto1,ponto2)
        angulo = angulo_rotacao(ponto1,ponto2)

```

```

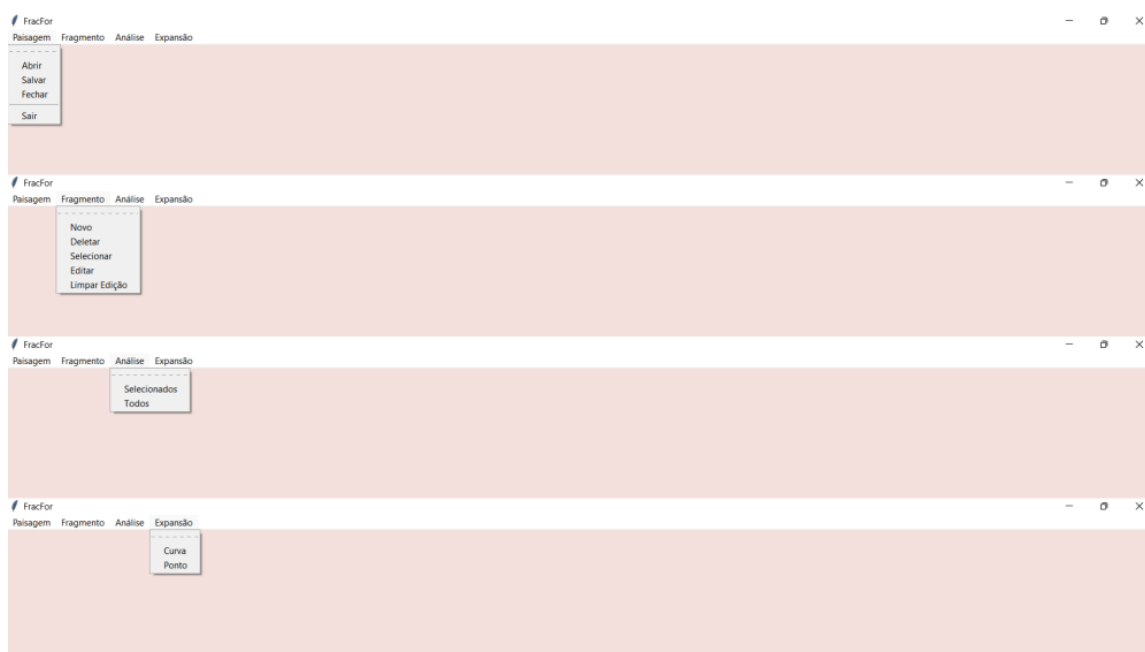
    ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto1,referencia),
        ↪ translacao(ponto2,referencia)]
    ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto1t,angulo),rotacao(
        ↪ ponto2t,angulo)]
    solucao = sp.solve(equacao_expansao_trapezio(poligono
        ↪ ,ponto1r,ponto2r,k).subs(i, altura), j)
    trapezio1,trapezio2 = (altura,l/2+converter_float(
        ↪ solucao[1])), (altura,l/2-converter_float(
        ↪ solucao[1]))
elif (ponto1[0] == ponto2[0] and ponto1[1] < ponto2[1])
    ↪ or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] == ponto2
    ↪ [1]) or (ponto1[0] < ponto2[0] and ponto1[1] <
    ↪ ponto2[1]) or (ponto1[0] > ponto2[0] and ponto1[1]
    ↪ < ponto2[1]):
    referencia = referencia_translacao(ponto2,ponto1)
    angulo = angulo_rotacao(ponto2,ponto1)
    ponto1t,ponto2t = [translacao(ponto2,referencia),
        ↪ translacao(ponto1,referencia)]
    ponto1r,ponto2r = [rotacao(ponto2t,angulo),rotacao(
        ↪ ponto1t,angulo)]
    solucao = sp.solve(equacao_expansao_trapezio(poligono
        ↪ ,ponto2r,ponto1r,k).subs(i, altura), j)
    trapezio1,trapezio2 = (-altura,l/2+converter_float(
        ↪ solucao[1])), (-altura,l/2-converter_float(
        ↪ solucao[1]))
trapezio1,trapezio2 = [rotacao(trapezio1,angulo,'r'),
    ↪ rotacao(trapezio2,angulo,'r')]
trapezio1,trapezio2 = [translacao(trapezio1,referencia,'r'
    ↪ '),translacao(trapezio2,referencia,'r')]
return trapezio1,trapezio2

```

## 6.4 Funcionalidades

Embora ainda não tenha sido finalizado, o aplicativo para a análise de imagens de fragmentos de paisagem já começou a ser desenvolvido. O aplicativo atualmente apresenta quatro menus: Paisagem, Fragmento, Análise e Expansão, com diferentes funcionalidades (Figura 26) em funcionamento e planeja-se a adição de mais funcionalidades conforme o aplicativo continue a ser desenvolvido.

Figura 26 – Interface do aplicativo.



O menu Paisagem, contém as funções Abrir, Salvar, Fechar e Sair. Na função Abrir, uma imagem nos formatos .JPG, .PNG ou .TIFF, pode ser carregada para a edição (Figura 27). A função Salvar, uma planilha com dados de área, perímetro, constante de proporcionalidade e dimensão perímetro-área (para  $k = 4$ ), dos fragmentos e um arquivo de imagem, novamente é possível escolher entre os formatos .JPG, .PNG e .TIFF, é salva. A função Fechar, encerra o trabalho com imagem aberta, tornando possível iniciar a análise de uma nova imagem, enquanto Sair encerra o aplicativo.

Figura 27 – Imagem de uma paisagem carregada através da função Abrir.

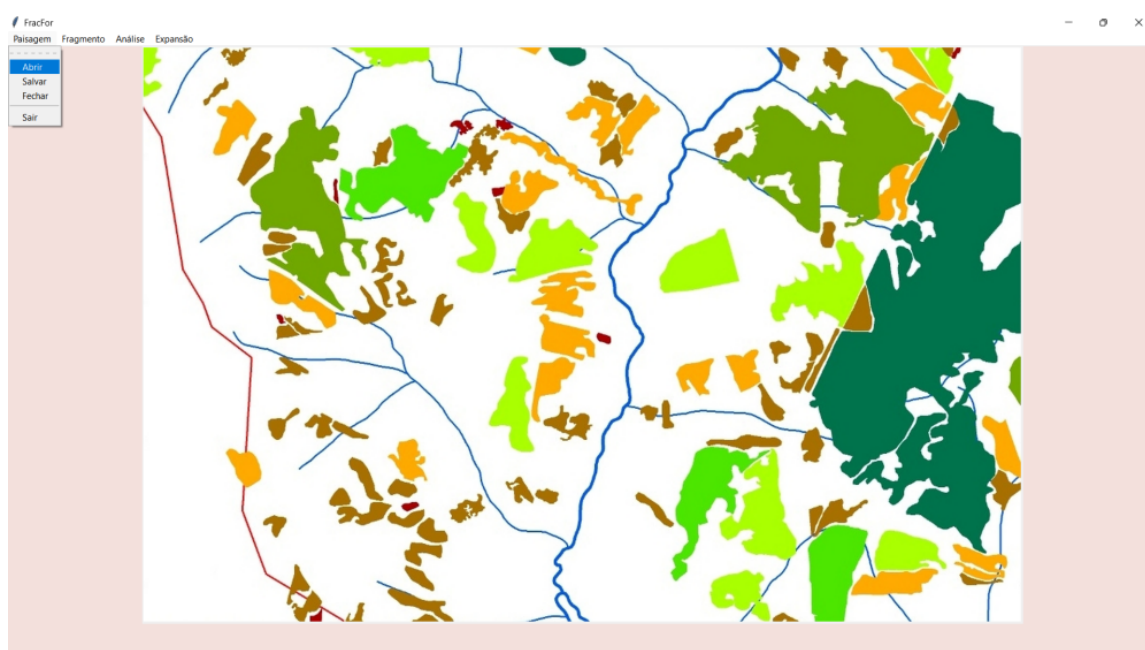
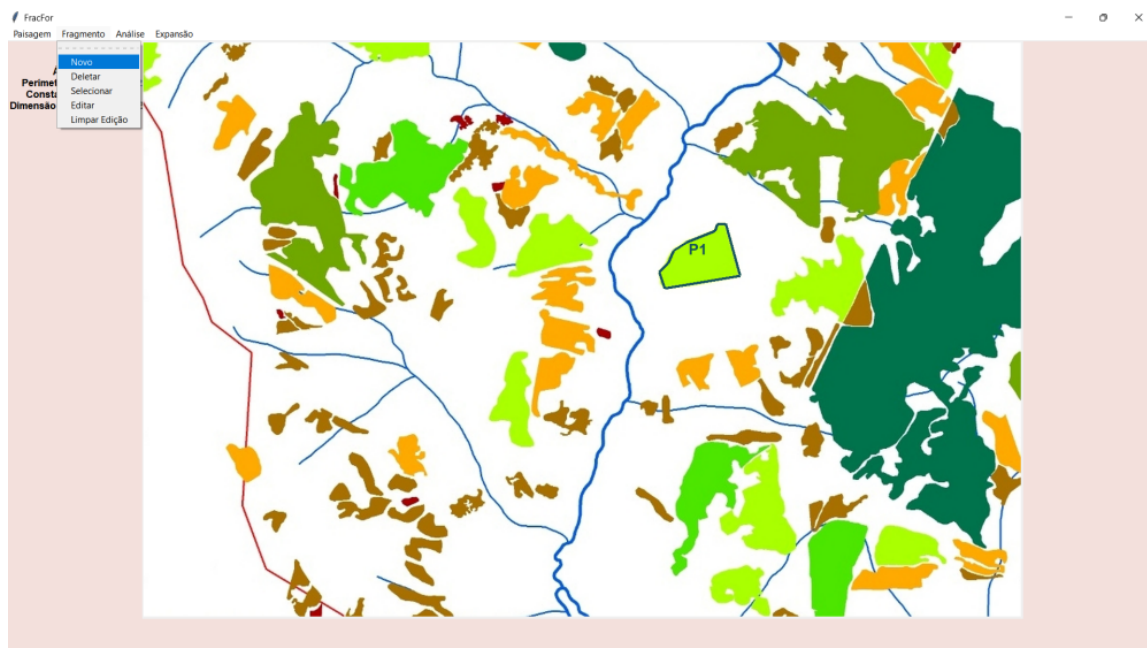


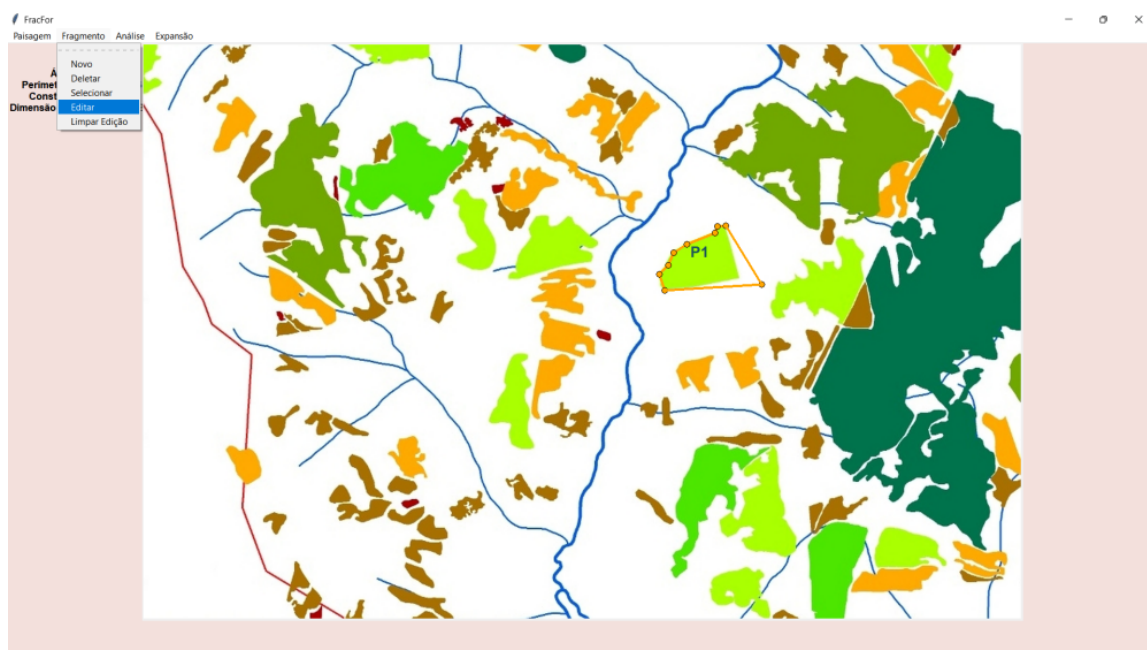


Figura 28 – Polígonos criados utilizando a função Novo.



No menu Fragmento, a função Novo permite ao usuário delinear o fragmento definindo vértices de um polígono (Figura 28). Imediatamente após a criação, os dados de área (em pixels), perímetro (em pixels), constante de proporcionalidade e dimensão perímetro-área (para  $k = 4$ ) são exibidos no canto esquerdo do aplicativo. Para que qualquer um dos polígonos delineado seja excluído basta selecionar a função Deletar e clicar no interior do polígono desejado, o que também apaga os dados do polígono.

Figura 29 – Deslocamento de um vértice feito através da função Editar.



Selecionar a função Editar e clicar no interior de algum polígono permite alterar as coordenadas dos vértices do polígono escolhido. A edição pode ser realizada de três formas:

Figura 30 – Criação de um novo vértice feito através da função Editar.

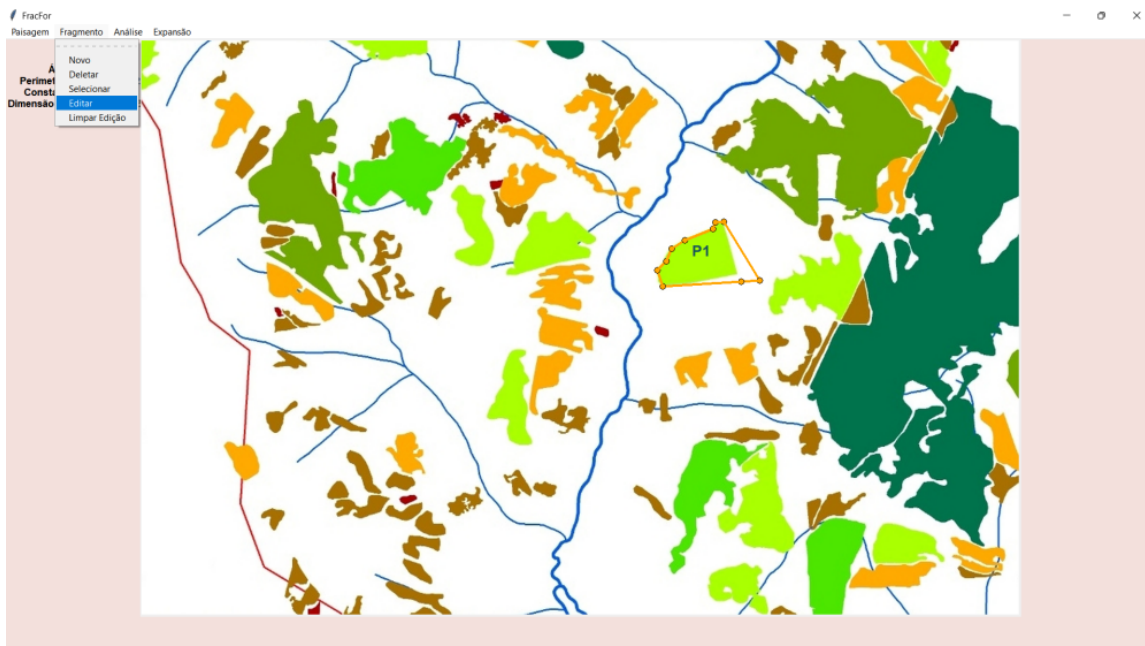
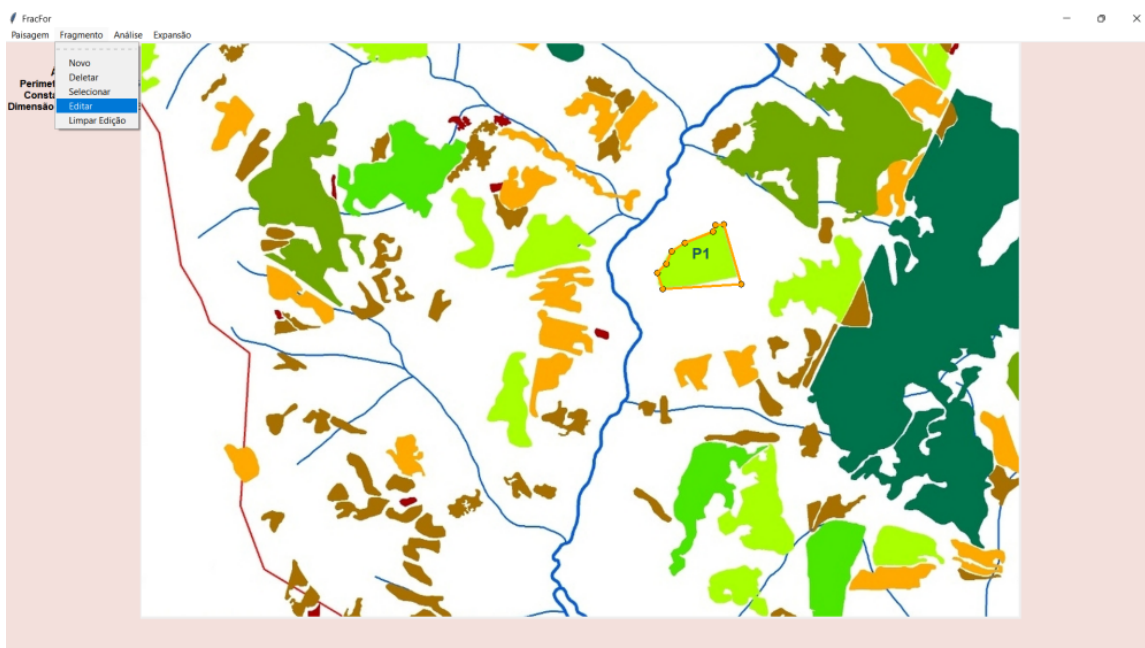


Figura 31 – Remoção de um vértice feito através da função Editar.



movendo um vértice de lugar ao clicar nele com o botão esquerdo do mouse e arrastando-o até um diferente local (Figura 29), criando um novo vértice ao clicar com o botão direito do mouse em um dos lados (Figura 30) ou removendo um vértice ao clicar nele com o botão direito do mouse (Figura 31).

O menu Análise contém as funções Todos, onde que analisa a possibilidade de expansão por triângulo de todos os polígonos delineados, e Seleccionado, onde apenas os polígonos selecionados através da função Selecionar no menu Fragmento são analisados. Em ambos os casos os lados que não admitem expansão são destacados em vermelho,

enquanto os lados que podem ser expandidos aparecem em amarelo (Figura 32).

Figura 32 – Resultado da análise de um polígono.

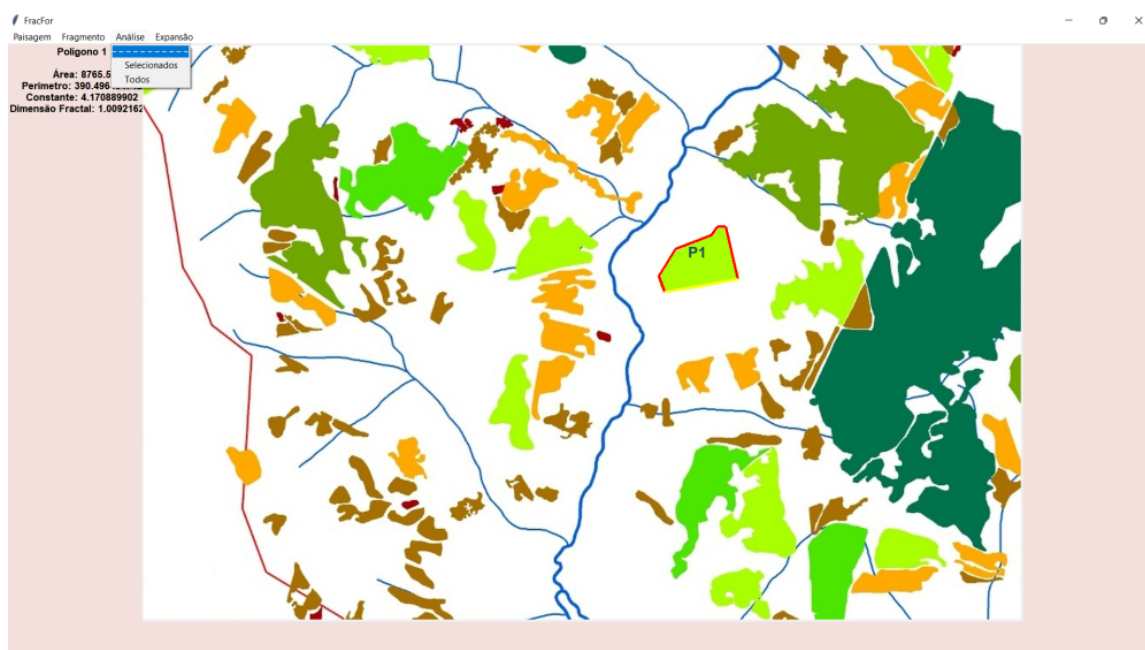
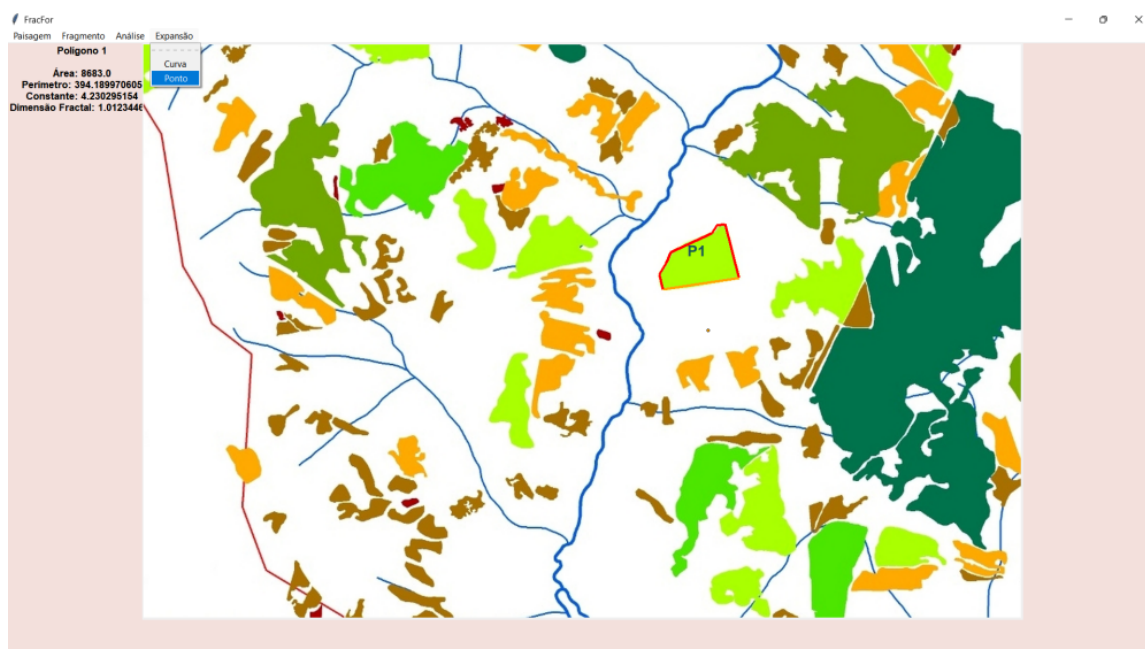


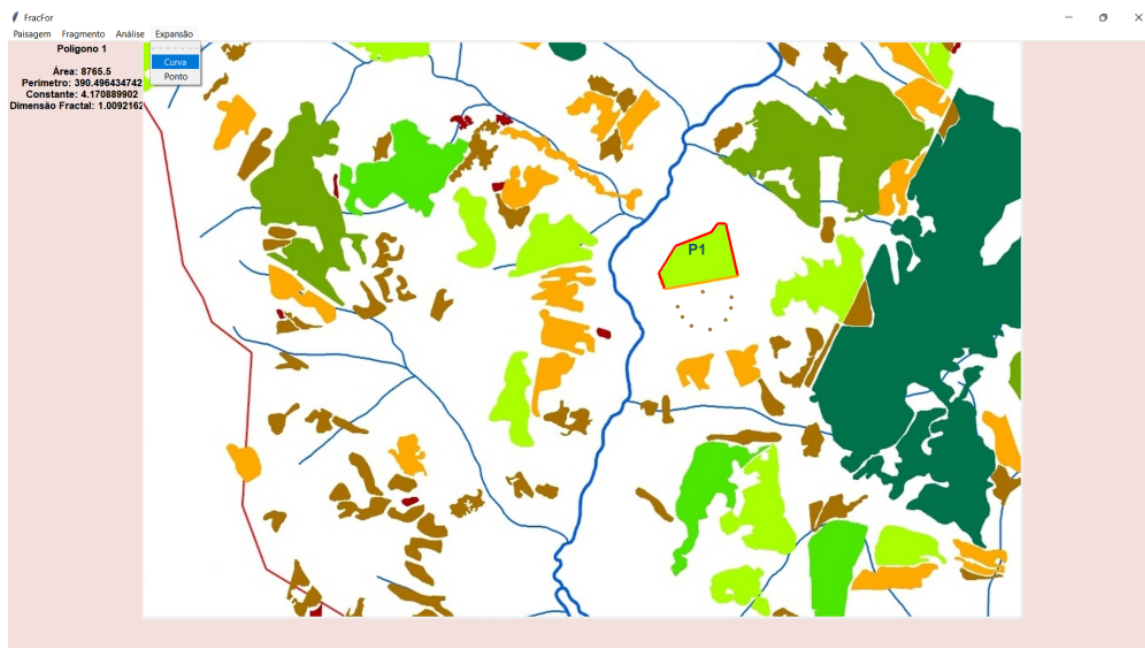
Figura 33 – Ponto da curva de expansão que expandiria o polígono analisado através da adição de um triângulo isósceles.



Por fim, o menu Expansão contém as funções Curva e Ponto. A função Ponto mostra apenas um ponto da curva de expansão (Figura 33), enquanto a função Curva mostra diversos pontos da curva de expansão (Figura 34). Ambas as funções são ativadas ao clicar-se na função e, em seguida, no lado de expansão.



Figura 34 – Curva de expansão do lado selecionado.



#### 6.4.1 Análise de fragmentos florestais da Bacia do Rio Catu

Para a análise dos fragmentos, foram escolhidas 3 sub-paisagens da Figura 1 e, utilizando o FracFor, delimitamos 5 fragmentos de cada sub-paisagem (Figuras 35, 36 e 37). As Tabelas 11, 12 e 13 mostram os dados de área, perímetro e dimensão perímetro-área de cada sub-paisagem.

Figura 35 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem A.



Figura 36 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem B.



Figura 37 – Análise dos fragmentos da sub-paisagem C.



Como já sinalizado anteriormente, o aplicativo retorna os valores de área e perímetro em pixels e não nas unidades de comprimento e área usuais, contudo a conversão de unidades pode ser feita calculando para cada imagem, quantos pixels correspondem a cada unidade de medida, como observado nas Tabelas 7, 8 e 9.

Tabela 11 – Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem A (Figura 35).

Fragmento	$A$ (px)	$P$ (px)	$D_F$
$P_1$	6476	332,97747	1,00771
$P_2$	1576,5	183,46085	1,03918
$P_3$	3911	280,80583	1,02795
$P_4$	19153	809,14966	1,07699
$P_5$	15790,5	583,25254	1,03077

Tabela 12 – Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem B (Figura 36).

Fragmento	$A$ (px)	$P$ (px)	$D_F$
$P_1$	766,5	108,75762	0,99455
$P_2$	764	105,07373	0,98466
$P_3$	6469,5	387,91476	1,04264
$P_4$	1389,5	151,19618	1,00385
$P_5$	19412,5	742,16348	1,05802

Tabela 13 – Tabela com os valores de área ( $A$ ), perímetro ( $P$ ) e dimensão perímetro-área ( $D_F$ ) dos fragmentos da sub-paisagem C (Figura 37).

Fragmento	$A$ (px)	$P$ (px)	$D_F$
$P_1$	8522,5	391,95603	1,01318
$P_2$	688	105,25525	1,00098
$P_3$	2214,5	199,73284	1,01540
$P_4$	258,5	65,77286	1,00809
$P_5$	305,5	73,38273	1,01692

Na sub-paisagem A, os fragmentos a admitirem expansão foram os fragmentos  $P_1$  e  $P_2$ , na sub-paisagem B, os fragmentos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_4$  admitiram expansão, enquanto a sub-paisagem C, os fragmentos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  e  $P_5$  puderam ser expandidos. Como destacado anteriormente, em um mesmo fragmento podem haver alguns lados que admitem expansão enquanto outros não. Dentre os fragmentos apresentados, apenas o fragmento  $P_1$  e  $P_2$  da sub-paisagem B admitiu expansão em todos os lados, isso se deve ao fato de este ser o único fragmento com dimensão perímetro-área menor do que 1.

## 7 Trabalhos

Decorrente dessa pesquisa, o artigo Interpretação Geométrica da Constante de Proporcionalidade da Dimensão Perímetro-Área foi apresentado no I Simpósio Baiano de Modelagem e Simulação de Biosistemas. O artigo é um resumo das ideias mostradas no Capítulo 5 e abordando o papel da constante de proporcionalidade na dimensão perímetro-área e como a escolha da constante pode tornar a dimensão invariante por homotetia.

Atualmente o artigo Fractal Stability Applied to Forestry Patches (Estabilidade Fractal aplicada a Fragmentos Florestais), que resume o Capítulo 3 apresentando a expansão por triângulo, foi finalizado e encontra-se sob formatação para publicação em revista.

Além destes, planeja-se a publicação de artigos trazendo a análise da dimensão fractal com constante modificada na morfologia de diferentes organismos, como folhas de plantas germinadas a diferentes níveis de hidratação.

Adicionalmente objetiva-se o contínuo desenvolvimento do aplicativo FracFor. Novos formatos como o shp (shapefile) devem ser aceitos.

## 8 Conclusão

Esta dissertação foi elaborada com o objetivo de definir um método para o planejamento da recuperação de fragmentos florestais para que estes tivessem a dimensão fractal perímetro-área desejada, para tal finalidade foi desenvolvido o método de expansão de fragmentos através da adição de triângulo ou trapézio isósceles. Devido a hipótese de que a dimensão perímetro-área poderia ser utilizada no desenvolvimento do método, o estudo das aplicações da geometria fractal na ecologia de paisagens teve foco nessa dimensão que mostrou-se como uma ferramenta apropriada para a elaboração do método.

Durante a análise da dimensão perímetro-área, observou-se que a constante de proporcionalidade influenciava a alteração da dimensão com a variação do tamanho dos fragmentos, o que levou a um estudo mais aprofundado do papel desempenhado pela constante na dimensão. Durante a pesquisa observou-se que alterações na constante tornavam a dimensão invariável para fragmentos que apresentassem a mesma forma, mas tamanhos diferentes, ocasionando a definição de uma dimensão com constante modificada para análise de alterações do formato de objetos da natureza.

Com o estudo da constante também concluiu-se que formas bem diferentes do quadrado poderiam ter dimensão perímetro-área igual a 1 para constante igual a 4, o que levou a elaboração do método de expansão que consiste em achar polígonos que tenham formato próximo ao do fragmento e dimensão fractal igual a 1.

Uma vez que foi constatado que o método de expansão por triângulo não era aplicável para qualquer fragmento de paisagem, pensou-se em métodos de expansão com a adição de diferentes figuras, como o trapézio isósceles. Embora possa ser aplicada em um número maior de fragmentos, a expansão por trapézio apresenta suas próprias limitações, como não possuir uma condição de existência, o que suscita a investigação de expansão por novas formas.

Embora normalmente ecologistas de paisagem não desejem que fragmentos de paisagem apresentem dimensão perímetro-área com valores bastante próximos 1, uma vez que esse é um indicativo de ação antrópica, o método de expansão foi proposto para a recuperação de fragmentos já degradados pela ação humana uma vez que fragmentos com dimensão próxima de 1, para  $k = 4$ , possuem uma boa relação perímetro-área o que é desejável em comparação a fragmentos que apresentam reentrâncias ou formas retangulares alongadas nos quais o efeito de borda é mais acentuado.



# Referências

- ALLAIN, C.; CLOITRE, M. Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 44, p. 3552–3558, Sep 1991. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- BARNSELY, M. F. et al. *The Science of Fractal Images*. [S.l.]: Springer, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 19.
- BROADBENT, E. N. et al. Forest fragmentation and edge effects from deforestation and selective logging in the brazilian amazon. *Biological Conservation*, v. 141, n. 7, p. 1745–1757, 2008. ISSN 0006-3207. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0006320708001377>>. Citado na página 15.
- CHEN, Y. Two sets of simple formulae to estimating fractal dimension of irregular boundaries. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2020, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 45.
- FALCONER, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 18 e 19.
- FRASER, J. M. *Assouad Dimension and Fractal Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. (Cambridge Tracts in Mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.
- GUSTAFSON, E. J. How has the state-of-the-art for quantification of landscape pattern advanced in the twenty-first century? *Landscape Ecol*, v. 34, p. 2065–2072, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.
- HALLEY, J. M. et al. Uses and abuses of fractal methodology in ecology. *Ecology Letters*, v. 7, n. 3, p. 254–271, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 22.
- KENKEL, N. C.; WALKER, D. J. Fractals in the biological sciences. *Coenoses*, Akadémiai Kiadó, v. 11, n. 2, p. 77–100, 1996. ISSN 03939154. Citado na página 22.
- KRUMMEL, J. R. et al. Landscape patterns in a disturbed environment. *Oikos*, [Nordic Society Oikos, Wiley], v. 48, n. 3, p. 321–324, 1987. ISSN 00301299, 16000706. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 27 e 39.
- LOPEZ, R.; FROHN, R. *Remote Sensing for Landscape Ecology: Monitoring, Modeling, and Assessment of Ecosystems*. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 15, 20, 21, 22 e 39.
- LOVEJOY, S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*, v. 216, n. 4542, p. 185–187, 1982. Citado na página 21.
- MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. [S.l.]: H. B. Fenn and Company Ltd., 1982. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 20.
- METZGER, J. P. O que é ecologia de paisagens? *Biota Neotrop.*, 2001. Citado na página 19.

- MILNE, B. T. Measuring the fractal geometry of landscapes. *Applied Mathematics and Computation*, v. 27, n. 1, p. 67–79, 1988. ISSN 0096-3003. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- MONTELLO, D. R. Scale in geography. In: WRIGHT, J. D. (Ed.). *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition)*. Second edition. Oxford: Elsevier, 2015. p. 1–3. ISBN 978-0-08-097087-5. Citado na página 20.
- MURCIA, C. Edge effects in fragmented forests: implications for conservation. *Trends in Ecology & Evolution*, v. 10, n. 2, p. 58–62, 1995. ISSN 0169-5347. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169534700889776>>. Citado na página 15.
- NEWMAN, E. A. et al. Scaling and complexity in landscape ecology. *Front. Ecol. Evol.*, 2019. Citado na página 19.
- OLSEN, E. R.; RAMSEY, R. D.; WINN, D. S. A modified fractal dimension as a measure of landscape diversity. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, v. 59, n. 10, p. 1517 – 1520, 1993. Cited by: 71. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- O'NEILL, R. V. et al. Indices of landscape pattern. *Landscape Ecol.*, v. 1, p. 153–162, 1988. Citado na página 23.
- RICOTTA, C. et al. A generalized non-regression technique for evaluating the fractal dimension of raster GIS layers consisting of non-square cells. *Coenoses*, Akadémiai Kiadó, v. 12, n. 1, p. 23–26, 1997. ISSN 03939154. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- ROSENBERG, E. *Fractal Dimensions of Networks*. [S.l.]: Springer, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 15, 17, 19, 20 e 21.
- SEURONT, L. *Fractals and multifractals in ecology and aquatic science*. [S.l.]: Taylor and Francis Group, LLC, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 21 e 22.
- SUGIHARA, G.; MAY, R. M. Applications of fractals in ecology. *Trends in Ecology & Evolution*, v. 5, n. 3, p. 79–86, 1990. ISSN 0169-5347. Citado na página 19.
- TRIPATHI, S. K. et al. Measuring ecosystem patterns and processes through fractals. *Current Science*, Current Science Association, v. 109, n. 8, p. 1418–1426, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 23, 28 e 49.
- TURNER, M. G. Landscape ecology: The effect of pattern on process. *Annual Review of Ecology and Systematics*, Annual Reviews, v. 20, p. 171–197, 1989. ISSN 00664162. Citado na página 20.
- TURNER, M. G. Spatial and temporal analysis of landscape patterns. *Landscape Ecol.*, v. 4, p. 21–30, 1990. Citado na página 22.
- TURNER, M. G.; GARDNER, R. H. *Landscape Ecology in Theory and Practice: Pattern and Process*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 19.
- TURNER, M. G.; RUSCHER, C. L. Changes in landscape patterns in Georgia, USA. *Landscape Ecol.*, v. 1, p. 241–251, 1988. Citado na página 22.

VAZ, G.; MATOS, M. Mapeamento e avaliação ecológica de Áreas de preservação permanente do rio catu, alagoinhas, bahia, brasil. *SITIENTIBUS Série Ciências Biológicas*, v. 14, 2014. Citado na página [16](#).

VRANKEN, I. et al. A review on the use of entropy in landscape ecology: heterogeneity, unpredictability, scale dependence and their links with thermodynamics. *Landscape Ecol*, v. 30, p. 51–65, 2015. Citado na página [22](#).

WU, J. Effects of changing scale on landscape pattern analysis: scaling relations. *Landscape Ecol*, v. 19, p. 125–138, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [20](#).

YU, H. et al. Landscape ecology development supported by geospatial technologies: A review. *Ecological Informatics*, v. 51, p. 185–192, 2019. ISSN 1574-9541. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [21](#) e [22](#).